

G. De Chirico
La Nostalgia dell'Infinito

appunti di
**analisi
matematica**

I LIMITI

Indice

0. Premessa.....	3
1. Distanza e proprietà	5
1.1 Distanza tra due punti.....	5
Definizione D1.1.....	5
Teorema T1.1.....	5
Teorema T1.2.....	6
Teorema T1.3 (inverso di T1.2).....	6
1.2 Distanza infinita.....	6
Teorema T1.4.....	6
2. Limiti di funzioni reali di una variabile reale.....	7
2.0 Premessa.....	7
2.1 Limite finito per t tendente a a	9
Definizione D2.1.....	9
2.2 Limite infinito per t tendente a a	10
Definizione D2.2.....	10
2.3 Limite t tendente a infinito.....	11
2.4 Limite finito per t tendente a infinito.....	11
Definizione D2.3.....	11
2.5 Limite infinito per t tendente a infinito	12
Definizione D2.4.....	12
2.6 Limite destro e limite sinistro.....	12
Definizione D2.5 (limite sinistro).....	12
Definizione D2.6 (limite destro).....	13
Teorema T2.1 (limite destro e sinistro).....	13
3. Teoremi sui limiti.....	14
Teorema T3.1 (Unicità del limite).....	14
Teorema T3.2 (Permanenza del segno).....	14
Teorema T3.3 (del confronto).....	15
4. Operazioni con i limiti.....	17
Teorema T4.1 (somma algebrica).....	17
Teorema T4.2 (prodotto numero per funzione).....	17
Teorema T4.3 (prodotto).....	17
Teorema T4.4 (rapporto).....	18
Teorema T4.5 (reciproco).....	18
Dimostrazione del teorema T4.1.....	18
5. Tabella delle forme determinate e indeterminate.....	20
6. Limiti notevoli.....	21
6.1 Limite notevole $\sin x/x$	21
6.2 Il numero di Nepero “e”.....	22
6.3 Ancora limiti.....	22
7. Calcolo di limiti.....	23
8. Tabella riassuntiva delle definizioni.....	27
Tabella riassuntiva delle definizioni.....	27
Tutte le definizioni con infinito.....	27

0. Premessa

L'ampio ambito che coinvolge l'Analisi Matematica richiederebbe volumi interi per poter presupporre una certa completezza. Questi appunti non hanno nessuna pretesa di completezza ma trattano quei pochi argomenti che ritengo possano aiutare uno studente a organizzare uno studio indipendente e proficuo.

Supponiamo di avere una funzione $y = f(x)$ definita in un insieme $A - \{x_0\}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per A . Ciò vuol dire che la funzione $y = f(x)$ non assume alcun valore per $x = x_0$ dove non risulta essere definita.

L'impossibilità di considerare un ultimo valore x prima di x_0 e un primo valore x dopo di x_0 (ricordiamo che si tratta di numeri reali per i quali non esistono "precedente" e "successivo") ci impone di considerare un intorno di valori contenente x_0 , intorno senz'altro esistente in quanto x_0 è un punto di accumulazione.

Ci chiediamo quale comportamento ha la funzione nel momento in cui x deve "raggiungere" il punto x_0 .

La funzione è "calcolabile" per tutte le $x < x_0$ e per tutte le $x > x_0$ in quanto in tali punti è definita.

Possiamo supporre varie situazioni:

1. La funzione si avvicina verso un valore finito, che indicheremo con $\ell \in \mathbb{R}$, sia per $x \rightarrow x_0$ da sinistra, cioè per le $x < x_0$, sia da destra, cioè per le $x > x_0$. Tutte le y si ammassano in prossimità del numero reale ℓ , e questo per qualunque x appartenente ad un intorno di x_0 . Ciò significa che se $x \in I_{x_0}$ allora $f(x) \in I_\ell$ (fig. 1)

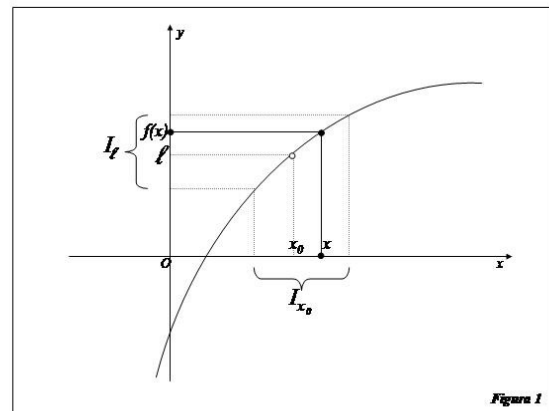


Figura 1

2. La funzione si avvicina verso un valore finito $\ell' \in \mathbb{R}$ per le $x < x_0$ e verso un valore finito $\ell'' \in \mathbb{R}$ distinto dal primo per le $x > x_0$. E' come se in prossimità di x_0 la funzione avesse un "salto" evitando lo stesso x_0 . In questo caso avremmo un intorno sinistro di x_0 per cui $f(x) \in I_{\ell'}$ e un intorno destro per cui $f(x) \in I_{\ell''}$. In ogni caso non possiamo dire che la funzione tende verso un unico valore. (fig. 2)

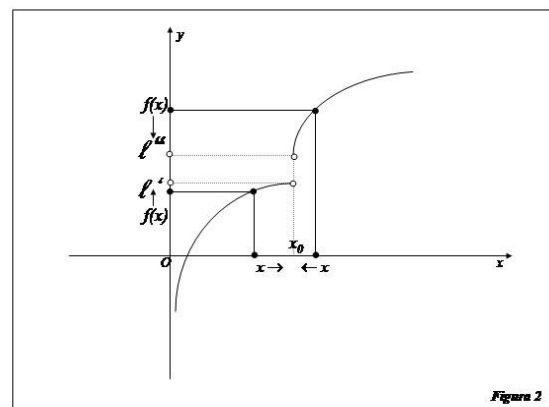
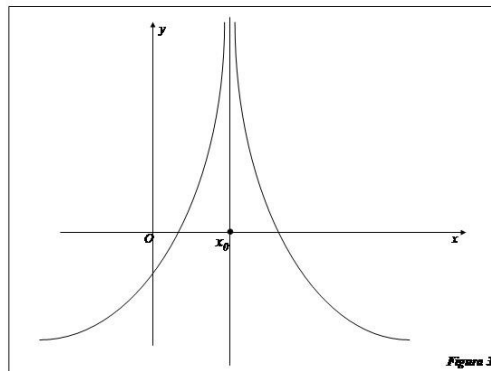


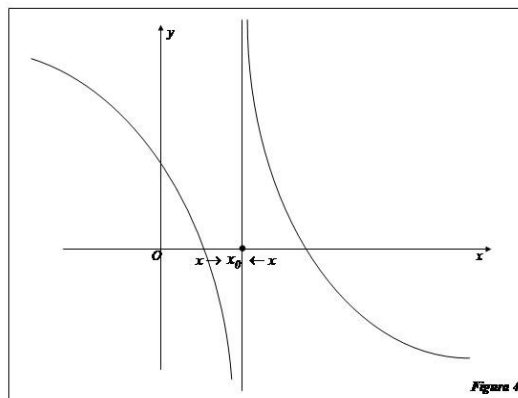
Figura 2

3. La funzione non si avvicina verso alcun valore avendo, in ogni intorno di x_0 , un andamento non “regolare”, impossibile da rappresentare con una curva.

4. La funzione assume, al tendere di $x \rightarrow x_0$, valori sempre più grandi in valore assoluto, crescendo verso $+\infty$ oppure decrescendo verso $-\infty$ sia per le x provenienti da sinistra che per le x provenienti da destra. La retta perpendicolare all’asse x e passante per x_0 divide il grafico della funzione, grafico che si “alza” assumendo una posizione “quasi” rettilinea (la distanza tra grafico e retta si affievolisce ma non diventa mai nulla). (fig. 3)



5. La funzione assume, al tendere di $x \rightarrow x_0$, valori sempre più grandi in valore assoluto, crescendo verso $+\infty$ per le x provenienti da sinistra (oppure da destra) e decrescendo verso $-\infty$ per le x provenienti da destra (da sinistra). In tal caso la retta perpendicolare all’asse x e passante per x_0 divide il grafico della funzione, grafico che si “alza” da un lato e si “abbassa” dall’altro



assumendo, in ogni caso, una posizione “quasi” rettilinea (la distanza tra grafico e retta si affievolisce ma non diventa mai nulla). (fig. 4)

Nel primo caso la funzione $y = f(x)$ “tende” ad assumere un unico valore finito, diremo che la funzione **converge** verso il numero reale l al tendere di $x \rightarrow x_0$.

Nel secondo e nel terzo caso la funzione non converge verso un unico valore. Diremo che la funzione non ammette limite.

Nel quarto caso la funzione “tende” ad assumere un unico valore infinito, diremo che la funzione $y = f(x)$ **diverge** verso ∞ al tendere di $x \rightarrow x_0$.

Nell’ultimo caso la funzione non diverge verso un unico valore. La funzione non ammette limite.

Vediamo come definire in maniera più rigorosa il limite matematico.

1. Distanza e proprietà

1.1 Distanza tra due punti

Con il termine “punti” indichiamo, in maniera generica, i numeri reali che individuano i punti sulla retta delle ascisse. Non bisogna, comunque, dimenticare la differenza esistente tra “punto”, entità geometrica, e numero reale, entità algebrica. L’applicazione biunivoca che associa i due “oggetti” ci permette di indicare i punti con le loro ascisse.

Definizione D1.1

Dati due punti x_1 e x_2 chiamiamo **distanza** tra x_1 e x_2 il **valore assoluto** della loro differenza:

$$d(x_1, x_2) = |x_2 - x_1|$$

Il teorema che segue caratterizza punti distinti o coincidenti in base alla loro distanza:

Teorema T1.1

Due punti x_1 e x_2 sono distinti se e solo se hanno distanza positiva; due punti sono coincidenti se e solo se hanno distanza nulla.

$$x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow |x_2 - x_1| > 0$$

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow |x_2 - x_1| = 0$$

L’Analisi Matematica si immerge all’interno di situazioni non descrivibili con i soli strumenti aritmetici e algebrici avendo a che fare con i numeri reali che sono estranei del concetto di “successivo” e “precedente”. D’altra parte bisogna affrontare matematicamente il procedere di un punto appartenente al dominio di una funzione reale verso un punto escluso da tale dominio.

La funzione $y = \frac{1}{x}$, per esempio, definita per tutti i valori diversi da zero, ammette la possibilità di calcolare il corrispondente valore y di qualsiasi x che si trova in prossimità di zero. Ma cosa significa in prossimità? Quale criterio possiamo adottare per stabilire se un punto prossimo a zero non vada a coincidere proprio con zero? Quale strumento è in grado di controllare la distanza tra i due valori essendo tale distanza infinitesima?

L’“invenzione” dell’Analisi Matematica si chiama **epsilon** (ϵ), una quantità **positiva e arbitraria**.

Se si riesce a determinare **un** ϵ tale che la distanza tra due punti risulta maggiore di questa quantità arbitrariamente “piccola” è evidente che i due punti saranno distinti: è possibile calcolare la funzione e procedere ancora verso il punto incriminato, quello escluso dal dominio della funzione.

Se, invece, **qualsiasi** ϵ si venga a scegliere, arbitrariamente “piccolo”, la distanza tra i due punti risultasse comunque minore di questa quantità, allora è evidente che la distanza tra i due punti è

nulla e i due punti coincidono: allora bisogna fermarsi, la funzione qui non esiste e non è quindi possibile calcolarla.

Ovviamente non saremo lì a calcolare all'infinito i valori della \mathcal{Y} ma adoteremo altri strumenti (come il limite) per capire l'andamento della funzione in prossimità del punto escluso dal dominio. Caratterizziamo quanto detto attraverso due semplici teoremi (senza dimostrazione)

Teorema T1.2

Due punti x_1 e x_2 sono distinti se e solo se **esiste una** quantità ε (epsilon) positiva arbitrariamente scelta tale che la distanza tra i due punti risulta maggiore di epsilon.

$$x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : |x_2 - x_1| > \varepsilon$$

Teorema T1.3 (inverso di T1.2)

Due punti x_1 e x_2 sono coincidenti se e solo se **per ogni** quantità ε positiva arbitrariamente scelta si ha che la distanza tra i due punti risulta minore di ε .

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad |x_2 - x_1| < \varepsilon$$

1.2 Distanza infinita

E' possibile immaginare un **numero** reale maggiore di qualsiasi altro numero? La risposta, ovviamente, è negativa. Ma allora come caratterizzare una variabile che cresce illimitatamente verso valori sempre maggiori e positivi (cioè verso l'infinito positivo) o che decresce illimitatamente verso valori sempre minori e negativi (cioè verso l'infinito negativo)?

Nuovamente utilizziamo il concetto di distanza. Dire che “ x tende verso più infinito” significa che il suo valore supera quello di un qualunque numero reale positivo, che chiameremo **M**, arbitrariamente grande. Ovvero comunque si fissi **M** la distanza di x dall'origine è maggiore di **M** stesso. In maniera analoga si può ragionare per “ x tendente verso meno infinito”. In definitiva:

Teorema T1.4

Una grandezza x tende verso infinito se comunque si fissi un numero reale positivo **M** arbitrariamente grande, il valore di x , in valore assoluto, supera **M**.

$$x \rightarrow \infty \text{ se } \forall M > 0 \quad |x| > M$$

2. Limiti di funzioni reali di una variabile reale

2.0 Premessa

Consideriamo nuovamente la funzione $y = \frac{1}{x}$ definita su tutta la retta ad esclusione dell'origine. Le considerazioni svolte fin qui per la variabile x sono valide anche per la variabile y . Possiamo quindi chiederci cosa succede alla variabile $y = f(x)$ quando x si avvicina a zero.

La tabella seguente mostra alcuni valori della funzione al tendere di x verso zero ($x \rightarrow 0$) da valori positivi, cioè più grandi di zero stesso:

x	$y=f(x)$
1	1
0,5	2
0,25	4
0,05	20
0,01	100
0,0001	10000
0,00000001	100000000

Come è facile notare la quantità $y = \frac{1}{x}$ tende ad assumere valori sempre maggiori e positivi, cioè tende verso $+\infty$.

Riprendendo le formulazioni precedenti, mentre la variabile x è tale da diminuire la sua distanza da zero, cioè qualsiasi quantità arbitraria e positiva che indicheremo δ (in genere la lettera ε viene utilizzata per i valori della funzione $f(x)$ sull'asse y) si fissi si ha che

$$|x - 0| = |x| < \delta$$

mentre, contemporaneamente, la variabile y , associata alla x mediante la funzione $y = \frac{1}{x}$, tende ad assumere valori sempre maggiori:

$$\forall M > 0 \quad |f(x)| = \left| \frac{1}{x} \right| > M$$

La tabella seguente mostra invece i valori della funzione al tendere di x verso zero ($x \rightarrow 0$) da valori negativi, cioè più piccoli di zero stesso:

x	$y=f(x)$
-1	-1
-0,5	-2
-0,25	-4
-0,05	-20
-0,01	-100
-0,0001	-10000
-0,00000001	-100000000

Adottando il valore assoluto possiamo notare che le condizioni riscontrate per x tendente verso zero per valori positivi valgono anche per la x tendente a zero per valori negativi.

$$|-x - 0| = |-x| = |x| < \delta$$

$$\forall M > 0 \quad |f(x)| = \left| -\frac{1}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} \right| > M$$

In effetti la forma $|f(x)| > M$ include sia la tendenza verso $+\infty$, data da $f(x) > M$, sia a tendenza verso $-\infty$, data da $f(x) < -M$, infatti, per definizione:

$$|f(x)| > M \Leftrightarrow f(x) < -M \cup f(x) > M$$

$$|f(x)| < k \Leftrightarrow -M < f(x) < M$$

In definitiva la funzione $y = \frac{1}{x}$, al tendere della variabile x verso zero, valore escluso dal dominio,

tende ad assumere valori infiniti, negativi se ci si avvicina da valori minori di zero, positivi se, al contrario, ci si avvicina da valori maggiori di zero.

Ovviamente abbiamo dedotto l'andamento della funzione da un numero finito di valori e ciò non sarebbe "matematicamente" corretto ma è possibile verificare, mediante le definizioni che daremo successivamente, che la funzione $y = \frac{1}{x}$ tende a infinito al tendere a zero della x .

Questo è il concetto di limite matematico: capire l'andamento di una variabile dipendente in prossimità di valori della variabile indipendente esclusi dal dominio (punti isolati del complementare, estremi non inclusi di intervalli, infinito).

Diamo adesso le definizioni di limite finito o infinito al tendere di x verso un valore finito o verso infinito.

2.1 Limite finito per x tendente a x_0

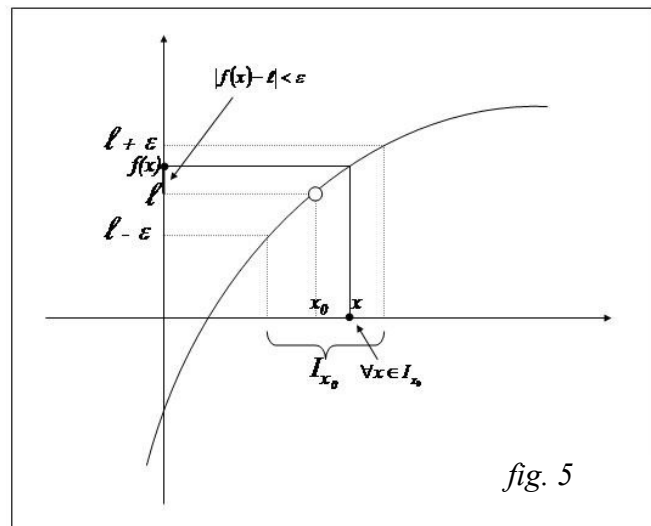
Definizione D2.1

Siano assegnati una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e il punto x_0 di accumulazione per A . Si dice che la funzione $y = f(x)$ tende al valore reale ℓ al tendere x verso x_0 se, comunque si prenda una quantità arbitraria $\varepsilon > 0$ esiste un intorno I_{x_0} di x_0 tale che $\forall x \in I_{x_0} - \{x_0\}$ si ha che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Esprimiamo la definizione precedente in termini analitici.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} - \{x_0\} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

La condizione $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, che è equivalente a $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$, ci informa che il valore della $y = f(x)$ tende ad assumere il valore ℓ se x tende verso x_0 . Nella definizione l'appartenenza di x all'intorno $I_{x_0} - \{x_0\}$ equivale a determinare un valore $\delta > 0$ per cui $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ (che sarebbe l'intorno), o, che è lo stesso, $|x - x_0| < \delta$, come espresso in precedenza.



Bisogna osservare che l'esistenza dell'intorno è collegata a ε , "... **per ogni epsilon esiste un intorno** ...", cioè la funzione ammette limite finito se è possibile determinare, in corrispondenza dell'*epsilon* fissato, un intorno del punto escluso per cui se la variabile x tende verso tale punto il valore y corrispondente ha distanza dal limite ℓ minore di ε .

Se la funzione $y = f(x)$ tende verso il numero reale ℓ al tendere x verso x_0 scriveremo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

Es.

Assegnata la funzione $y = \frac{2x^2 - 2}{x + 1}$, definita su tutta la retta reale ad esclusione del punto $x = -1$, si può dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 2}{x + 1} = -4$$

(Il calcolo di tale limite sarà trattato successivamente).

In base alla definizione, il limite precedente si esprime come

$$\forall \varepsilon > 0 \exists I_{-4} : \forall x \in I_{-4} - \{-4\} \quad \left| \frac{2x^2 - 2}{x + 1} - (-4) \right| < \varepsilon$$

La verifica del limite precedente prevede la risoluzione di una disequazione con valore assoluto equivalente ad un sistema di disequazioni che darà come risultato due intervalli: uno a sinistra di -1, l'altro a destra di -1. In effetti bisogna considerare che la variabile x può avvicinarsi al valore -1 sia da sinistra, per valori minori di -1, sia da destra, per valori maggiori di -1. Ciò ci introduce ai limiti destro e sinistro di una funzione che verranno definiti in seguito.

2.2 Limite infinito per x tendente a x_0

Definizione D2.2

Siano assegnati una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e il punto x_0 di accumulazione per A . Si dice che la funzione $y = f(x)$ tende a infinito al tendere x verso x_0 se, comunque si prenda una quantità arbitraria $M > 0$ esiste un intorno I_{x_0} di x_0 tale che $\forall x \in I_{x_0} - \{x_0\}$ si ha che $|f(x)| > M$.

Esprimiamo la definizione precedente in termini analitici.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} - \{x_0\} \quad |f(x)| > M$$

Possiamo distinguere i due casi possibili.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} - \{x_0\} \quad f(x) > M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} - \{x_0\} \quad f(x) < -M$$

Questo è il caso della funzione $y = \frac{1}{x}$ al tendere di $x \rightarrow 0$. In particolare anche qui dobbiamo distinguere tra limite destro e limite sinistro: infatti al tendere di x verso zero da destra, $x \rightarrow 0^+$, la funzione tende a $+\infty$, mentre se x tende verso zero da sinistra, $x \rightarrow 0^-$, la funzione tende a $-\infty$.

Ma, dunque, possiamo affermare che esiste il limite della funzione $y = \frac{1}{x}$ al tendere di $x \rightarrow 0$? In effetti no, anche se esistono, ma differenti, il limite destro e il limite sinistro.

Sarà necessario quindi definire i due limiti ed enunciare un importante teorema. Ciò verrà fatto in seguito.

2.3 Limite per x tendente a infinito

Finora abbiamo considerato il caso in cui, trovandoci in prossimità di un punto escluso dal dominio di una funzione reale $y = f(x)$, abbiamo utilizzato il concetto di limite per indagare sull'andamento della funzione al tendere della variabile x verso quel punto.

Adesso cerchiamo di dare una risposta alla necessità di indicare l'andamento della funzione al tendere di x verso infinito, positivo o negativo.

Come, ad esempio, definire il fatto che mentre la variabile x si allontana definitivamente verso l'infinito la variabile dipendente $y = f(x)$ si approssima sempre più all'andamento lineare di una retta?

Diamo di seguito le definizioni di limite per x tendente a infinito.

2.4 Limite finito per x tendente a infinito

Definizione D2.3

Sia assegnata una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che la funzione $y = f(x)$ tende al valore reale ℓ al tendere di x verso infinito se, comunque si prenda una quantità arbitraria $\varepsilon > 0$ esiste un numero reale $k > 0$ tale che $\forall |x| > k$ si ha che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

Esprimiamo la definizione precedente in termini analitici.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k > 0 : \forall x > k \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Possiamo distinguere i due casi possibili.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k > 0 : \forall x > k \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k > 0 : \forall x < -k \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \end{aligned}$$

2.5 Limite infinito per x tendente a infinito

Definizione D2.4

Sia assegnata una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che la funzione $y = f(x)$ tende a infinito al tendere x verso infinito se, comunque si prenda una quantità arbitraria $M > 0$ esiste un numero reale $k > 0$ tale che $\forall |x| > k$ si ha che $|f(x)| > M$.

Esprimiamo la definizione precedente in termini analitici.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists k > 0 : \forall |x| > k \quad |f(x)| > M$$

Possiamo distinguere quattro casi possibili.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists k > 0 : \forall x > k \quad f(x) > M$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists k > 0: \forall x > k \quad f(x) < -M$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists k < 0: \forall x < -k \quad f(x) > M$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists k < 0: \forall x < -k \quad f(x) < -M$$

Le funzioni che tendono verso un valore finito si dicono **convergenti**.

Le funzioni che tendono verso infinito si dicono **divergenti**.

Le funzioni che ammettono limite (convergenti o divergenti) si dicono **regolari**.

Le funzioni che non ammettono limite si dicono **irregolari** o **oscillanti**.

Esempio di funzione oscillante:

la funzione $y = \text{sen}(x)$ definita su tutta la retta che associa ad ogni angolo il valore del seno dell'angolo, al tendere di x verso infinito, non ammette limite in quanto la funzione oscilla tra i valori -1 ed 1.

2.6 Limite destro e limite sinistro

Definizione D2.5 (limite sinistro)

Siano assegnati una funzione $f: A \rightarrow \mathfrak{R}$ e il punto x_0 di accumulazione per A. Si dice che la funzione $y = f(x)$ tende al valore reale ℓ al tendere x verso x_0 da **sinistra** se, comunque si prenda una quantità arbitraria $\varepsilon > 0$ esiste un intorno **sinistro** I_{x_0} di x_0 tale che $\forall x \in I_{x_0} - \{x_0\}$ si ha che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Definizione D2.6 (limite destro)

Siano assegnati una funzione $f: A \rightarrow \mathfrak{R}$ e il punto x_0 di accumulazione per A. Si dice che la funzione $y = f(x)$ tende al valore reale ℓ al tendere di x verso x_0 da **destra** se, comunque si prenda una quantità arbitraria $\varepsilon > 0$ esiste un intorno **destro** I_{x_0} di x_0 tale che $\forall x \in I_{x_0} - \{x_0\}$ si ha che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Il limite “da un solo lato” si effettua, per esempio, facendo tendere la variabile x verso un estremo escluso dal dominio formato da un intervallo aperto.

Limite destro e sinistro vengono indicati, rispettivamente:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell & \text{limite destro} \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell & \text{limite sinistro} \end{array}$$

Es.

La funzione $y = \frac{x-2}{\sqrt{4-x^2}}$ è definita per $-2 < x < 2$. Non è possibile quindi far tendere la variabile x verso -2 per valori più piccoli di -2 né verso 2 per valori maggiori di 2 .

Esisteranno, allora, il limite destro per $x \rightarrow -2^+$ e il limite sinistro per $x \rightarrow -2^-$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-2}{\sqrt{4-x^2}} = -\infty \quad (\text{questo è un limite immediato che affronteremo in seguito})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \quad (\text{questo limite non è immediato e il calcolo sarà effettuato in seguito})$$

Una funzione può ammettere, per x tendente verso x_0 , limite destro o limite sinistro o entrambi non necessariamente coincidenti. Diremo che la funzione ammette limite (finito o infinito) solo se i limiti destro e sinistro coincidono. Vale cioè il seguente importante teorema

Teorema T2.1 (limite destro e sinistro)

Una funzione reale $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ammette limite (finito o infinito) al tendere di x verso x_0 se esistono coincidenti il limite destro e il limite sinistro.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$$

3. Teoremi sui limiti

Enunciamo e dimostriamo alcuni dei più importanti teoremi sui limiti.

Teorema T3.1 (Unicità del limite)

Se esiste il limite della funzione $f(x)$, per x tendente a x_0 , tale limite è unico.

$$\text{HpTs } \left. \begin{array}{l} f : A \rightarrow \mathfrak{R} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \end{array} \right| \Rightarrow \ell \text{ è unico}$$

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che esistono due limiti distinti ℓ_1 e ℓ_2 . Per la definizione di limite si avrà:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1 &\rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists I'_x : \forall x \in I'_x |f(x) - \ell_1| < \varepsilon \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_2 &\rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists I''_x : \forall x \in I''_x |f(x) - \ell_2| < \varepsilon \end{aligned}$$

le due definizioni valgono contemporaneamente per le x appartenenti all'intersezione dei due intorni e, considerata l'arbitrarietà di ε , possiamo considerare $\frac{\varepsilon}{2}$.

In definitiva:

$$\begin{aligned} &\forall x \in I'_x \cap I''_x \\ |\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - f(x) + f(x) - \ell_2| \leq |\ell_1 - f(x)| + |f(x) - \ell_2| = \\ &= |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned} \quad (1)$$

e, quindi, i due limiti non possono che coincidere essendo la loro distanza minore di qualunque valore positivo arbitrariamente piccolo (cfr. il teorema T3).

$$\ell_1 = \ell_2 \quad \text{contro la supposizione } \ell_1 \neq \ell_2$$

La contraddittorietà nasce dalla negazione della tesi che risulta, quindi, vera.

¹ Vale, infatti la disuguaglianza $|a + b| \leq |a| + |b|$

Teorema T3.2 (Permanenza del segno)

Se una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, per x tendente a x_0 , tende ad un limite finito $\ell \neq 0$, esiste un intorno I_{x_0} tale che per ogni suo punto $x \neq x_0$, la funzione $f(x)$ assume valori dello stesso segno del suo limite.

$$\text{Hp Ts} \left. \begin{array}{l} f : A \rightarrow \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell > 0 \text{ (} < 0 \text{)} \end{array} \right| \Rightarrow \exists I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} \quad f(x) > 0 \text{ (} < 0 \text{)}$$

(dimostrazione omessa)

Teorema T3.3 (del confronto)

Siano assegnate tre funzioni $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$ definite nello stesso insieme A , eccetto al più un punto x_0 .

Se per ogni x risulta:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in A$$

e se, inoltre, è:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell$$

allora risulta anche:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

$$\text{Hp Ts} \left. \begin{array}{l} f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \forall x \in A \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \\ \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell \end{array} \right| \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

Dimostrazione

Per la definizione di limite per la funzione $g(x)$ si avrà:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists I'_{x_0} : \forall x \in I'_{x_0} \quad |g(x) - \ell| < \varepsilon$$

o, che è lo stesso, $\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$

e, analogamente per la funzione $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists I''_{x_0} : \forall x \in I''_{x_0} |h(x) - \ell| < \varepsilon$$

o, che è lo stesso,

$$\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$$

In definitiva: $\forall x \in I_{x_0} = I'_{x_0} \cap I''_{x_0}$ succede che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} \quad \ell - \varepsilon < h(x) \leq f(x) \leq g(x) < \ell + \varepsilon$$

Ovvero

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

che, in definitiva, è la definizione del limite della tesi.

4. Operazioni con i limiti

Nell'ambito della teoria de limiti trovano spazio alcuni teoremi che evidenziano la natura “algebraica” del concetto di limite che può, in questo modo, fregiarsi del titolo di “operatore matematico”. Ma trattandosi di quantità che tendono verso valori nulli (infinitesimi) o verso valori infiniti si possono incontrare alcune forme operative che danno luogo a indeterminazione. Se, per esempio la forma $\frac{0}{\infty}$, che esprime il rapporto di un infinitesimo su un infinito, tende verso zero,

nulla possiamo dire in generale delle forme $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$ che esprimono il rapporto tra due infiniti e tra due infinitesimi.

In ogni caso, comunque, abbiamo la certezza di poter parlare di “rapporto” tra limiti.

Vediamo, dunque, i seguenti teoremi:

Teorema T4.1 (somma algebrica)

Siano $y = f(x)$ e $y = g(x)$ due funzioni reali definite in A e convergenti per x che tende verso x_0 . Allora le funzioni $(f + g)(x)$ e $(f - g)(x)$ convergono per x che tende verso x_0 e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

In altre parole possiamo affermare che *il limite della somma algebrica è uguale alla somma algebrica dei limiti.*

Teorema T4.2 (prodotto numero per funzione)

Siano k un numero reale e $y = f(x)$ una funzione reale convergente per x che tende verso x_0 . Allora la funzione $kf(x)$ converge per x che tende verso x_0 e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

In altre parole possiamo affermare che *il limite del prodotto di un numero per una funzione è uguale al prodotto del numero per il limite della funzione.*

Teorema T4.3 (prodotto)

Siano $y = f(x)$ e $y = g(x)$ due funzioni reali definite in A e convergenti per x che tende verso x_0 . Allora la funzione $f(x) \cdot g(x)$ converge per x che tende verso x_0 e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

In altre parole possiamo affermare che *il limite di un prodotto è uguale al prodotto dei limiti.*

Teorema T4.4 (rapporto)

Siano $y = f(x)$ e $y = g(x)$ due funzioni reali definite in A e convergenti per x che tende verso x_0 con $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in A$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$. Allora la funzione $\frac{f(x)}{g(x)}$ converge per x che tende verso x_0 e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

In altre parole possiamo affermare che *il limite di un rapporto è uguale al rapporto dei limiti*.

Teorema T4.5 (reciproco)

Sia $y = f(x)$ una funzione reale definita in A e convergente per x che tende verso x_0 con $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in A$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$. Allora la funzione $\frac{1}{f(x)}$ converge per x che tende verso x_0 e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$$

In altre parole possiamo affermare che *il limite del reciproco è uguale al reciproco del limite*.

I teoremi precedenti valgono anche per $x \rightarrow \infty$.

Dimostriamo il teorema T4.1 lasciando le altre dimostrazioni come esercizio notando che la tecnica di dimostrazione è la stessa per tutti i teoremi.

Dimostrazione del teorema T4.1

Per ipotesi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$$

Per cui

$$\forall \varepsilon > 0 \exists I'_{x_0} : \forall x \in I'_{x_0} |f(x) - \ell_1| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists I''_{x_0} : \forall x \in I''_{x_0} |g(x) - \ell_2| < \varepsilon$$

le due definizioni valgono contemporaneamente $\forall x \in I'_{x_0} \cap I''_{x_0}$, cioè per tutte quelle x appartenenti sia al primo che al secondo intorno e, considerata l'arbitrarietà di ε , possiamo considerare $\varepsilon/2$.

In definitiva:

$$\forall x \in I'_{x_0} \cap I''_{x_0}$$

$$\begin{aligned}
 |f(x) + g(x) - (\ell_1 + \ell_2)| &= |f(x) + g(x) - \ell_1 - \ell_2| = |f(x) - \ell_1 + g(x) - \ell_2| \leq \\
 &\leq |f(x) - \ell_1| + |g(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
 \end{aligned}$$

che, in definitiva, è la definizione del

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \ell_1 + \ell_2.$$

c.v.d.

L'uso delle operazioni algebriche permette di facilitare il calcolo dei limiti di quelle funzioni ottenute come somma, prodotto o rapporto di altre funzioni. La possibilità di trovare come tendenza valori come *zero* o *infinito* però danno luogo a forme non determinabili (dette **forme indeterminate**) riguardo il loro risultato. Ad esempio una funzione che risulta prodotto di due funzioni che siano l'una *infinitesima* e l'altra *infinita* ($0 \cdot \infty$) potrà convergere o divergere e per capirlo dobbiamo “risolvere” la forma indeterminata. Altre forme, invece, vengono dette **forme determinate** in quanto il loro risultato (inteso come tendenza della funzione) è noto. Ad esempio un funzione formata dal rapporto di una quantità tendente verso un *valore finito* su una quantità che

diverge a *infinito* $\left(\frac{n}{\infty}\right)$, tenderà a zero.

5. Tabella delle forme determinate e indeterminate

rapporto	prodotto	somma	potenza
$\frac{n}{0} \rightarrow \infty$	$n \cdot 0 = 0$	$0 \pm \infty \rightarrow \pm \infty$	$0^n = 0$
$\frac{0}{n} = 0$	$n \cdot \infty \rightarrow \infty$	$n \pm \infty \rightarrow \pm \infty$	$0^\infty \rightarrow 0$
$\frac{n}{\infty} \rightarrow 0$	$0 \cdot \infty$ <i>f.i.</i>	$+\infty + \infty \rightarrow +\infty$	0^0 <i>f.i.</i>
$\frac{\infty}{n} \rightarrow \infty$		$-\infty - \infty \rightarrow -\infty$	$n^0 = 1$
$\frac{0}{\infty} \rightarrow 0$		$\mp \infty \pm \infty$ <i>f.i.</i>	$n^{+\infty} \rightarrow 0$ se $0 < n < 1$
$\frac{\infty}{0} \rightarrow \infty$			$n^{+\infty} \rightarrow \infty$ se $n > 1$
$\frac{0}{0}$ <i>f.i.</i>			$n^{-\infty} \rightarrow \infty$ se $0 < n < 1$
$\frac{\infty}{\infty}$ <i>f.i.</i>			$n^{-\infty} \rightarrow 0$ se $n > 1$
			$+\infty^n \rightarrow +\infty$
			$+\infty^{+\infty} \rightarrow +\infty$
			$+\infty^{-\infty} \rightarrow 0$
			$+\infty^0$ <i>f.i.</i>
			$1^n = 1$
			$1^0 = 1$
			1^∞ <i>f.i.</i>

FORME INDETERMINATE

LINEARI				ESPONENZIALI		
$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0 \cdot \infty$	$\pm \infty \mp \infty$	0^0	1^∞	∞^0

6. Limiti notevoli

Alcuni limiti danno luogo a forme indeterminate non risolvibili per via algebrica. Essi vengono risolti con altri procedimenti (p. e. geometrici) e vengono assunti come punto di partenza per la risoluzione di altri limiti di forma simile. Questi limiti vengono detti **limiti notevoli**.

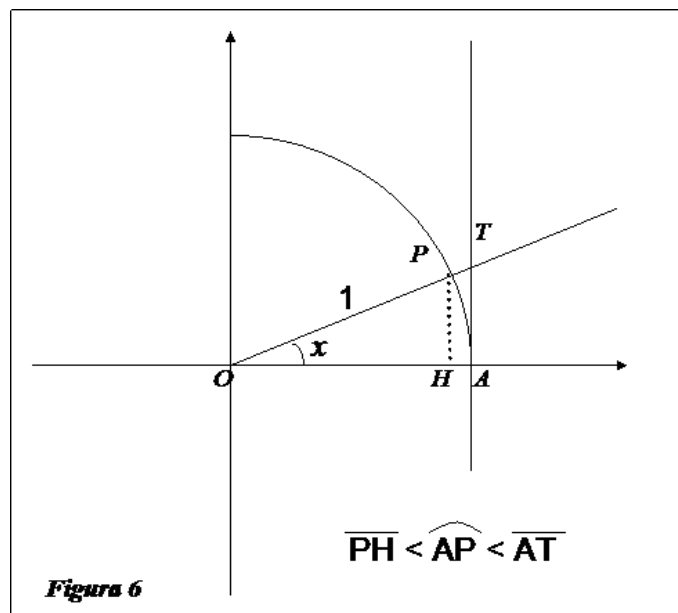
6.1 Limite notevole $\sin x/x$

Si vuole dimostrare il seguente limite notevole:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Procediamo per via geometrica. Nella circonferenza goniometrica sia x un angolo (per comodità di dimostrazione lo prendiamo acuto) e siano P e T i punti che il raggio individuato da x interseca rispettivamente sulla circonferenza e sulla retta tangente in A. Sia, infine, H la proiezione di P sull'asse x (vedi fig. 6). L'arco AP risulta evidentemente di lunghezza compresa tra le misure dei segmenti PH e AT:

$$\overline{PH} < \widehat{AP} < \overline{AT}$$



Essendo $\overline{PH} = \sin x$, $\widehat{AP} = x$ (misurato in radianti) e $\overline{AT} = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ si avrà:

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

Dividendo tutti i termini delle disuguaglianze per $\sin x$ (sicuramente positivo essendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$)

$$\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

Invertendo i termini delle disuguaglianze (e cambiando i versi delle disuguaglianze)

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$$

Al tendere di $x \rightarrow 0$ le quantità esterne tendono entrambe a 1 ($\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ e la funzione $y=1$ è costante) per cui, per il *teorema del confronto* (cfr. T3.3) anche la quantità interna tende allo stesso valore.

c.v.d.

6.2 Il numero di Nepero “e”

Anche il numero di Nepero $e = 2,718282\dots$, base dei logaritmi naturali, è il limite di una forma indeterminata del tipo 1^0 . Si ha infatti:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

La dimostrazione di questo limite notevole è omessa.

6.3 Ancora limiti

Dai limiti notevoli sopra esposti se ne deducono altri che elenchiamo di seguito (le dimostrazioni sono omesse)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

7. Calcolo di limiti

Limitiamo il calcolo dei limiti a poche funzioni (algebriche e irrazionali) utilizzando strumenti algebrici.

La prima cosa da fare, per calcolare un limite, è sostituire il valore a cui tende la variabile x alla variabile stessa. Se si ottiene una **forma determinata** abbiamo terminato, se invece si ottiene una **forma indeterminata** bisogna eliminare l'indeterminazione utilizzando scomposizioni, semplificazioni o razionalizzazioni.

Vediamo come.

Calcolare

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$$

Sostituendo il valore 2 alla x si ottiene la forma determinata $\frac{1}{2-2} = \frac{1}{0}$ che tende a ∞ .

In definitiva

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = \infty.$$

(Il segno di infinito varia a seconda se la x tende verso 2 da destra o da sinistra)

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Sostituendo il valore 2 alla x si ottiene la forma indeterminata $\frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0}$.

In questo caso bisogna **scomporre** il polinomio al numeratore.

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$$

Adesso possiamo calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2+2 = 4$$

Da questo ultimo esempio possiamo generalizzare il procedimento risolutivo nel caso in cui la funzione è data dal rapporto di due polinomi infinitesimi per x che tende verso x_0 .

In questo caso bisogna eliminare l'indeterminazione $\frac{0}{0}$ mediante la scomposizione dei polinomi e l'elisione dei fattori comuni.

Vediamo qualche altro esempio:

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^3 - 81x}{\sqrt{x} - 3}$$

Sostituiamo, per prima cosa, il valore 3 alla variabile x .

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^3 - 81x}{\sqrt{x} - 3} = \frac{9^3 - 81 \cdot 9}{\sqrt{9} - 3} = \frac{729 - 729}{3 - 3} = \frac{0}{0} \quad \text{f. i.}$$

Proviamo a scomporre il polinomio al numeratore e la forma radicale al denominatore:

$$\frac{x^3 - 81x}{\sqrt{x} - 3} = \frac{x(x^2 - 81)}{\sqrt{x} - 3} \cdot \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3} = \frac{x(x \cancel{9})(x + 9)}{\cancel{x} 9} = x(x + 9)$$

Per cui:

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^3 - 81x}{\sqrt{x} - 3} = \lim_{x \rightarrow 9} x(x + 9) = 9 \cdot 18 = 162$$

Notate che la forma radicale va eliminata come una “normale” razionalizzazione e che abbiamo utilizzato il teorema T11 (prodotto di limiti) per calcolare il limite della funzione.

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{2x}}{x-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{2x}}{x-4} = \frac{\sqrt{4+4} - \sqrt{2 \cdot 4}}{4-4} = \frac{\sqrt{8} - \sqrt{8}}{0} = \frac{0}{0} \quad \text{f. i.}$$

Questa volta andremo avanti cercando di eliminare l'indeterminazione e, contestualmente, riportando la dicitura *lim*.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{2x}}{x-4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{2x}}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{4+x} + \sqrt{2x}}{\sqrt{4+x} + \sqrt{2x}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4+x-2x}{(x-4)(\sqrt{4+x} + \sqrt{2x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{(x-4)(\sqrt{4+x} + \sqrt{2x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x \cancel{4})}{(\cancel{x} \cancel{4})(\sqrt{4+x} + \sqrt{2x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-1}{(\sqrt{4+x} + \sqrt{2x})} = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{8} + \sqrt{8}} = \frac{-1}{2\sqrt{8}} = -\frac{1}{2\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{8}}{16}. \end{aligned}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 5x^2 + 2x - 3}{x^2 + 3}$$

Sostituiamo il “ $+\infty$ ” come se fosse un valore numerico:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 5x^2 + 2x - 3}{x^2 + 3} = \frac{(+\infty)^4 - 5(+\infty)^2 + 2(+\infty) - 3}{(+\infty)^2 + 3} = \frac{+\infty - \infty + \infty - 3}{\infty + 3} \quad \text{f.i.}$$

Per eliminare le forme indeterminate dividiamo ciascun termine per la potenza massima di x .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^4}{x^4} - \frac{5x^2}{x^4} + \frac{2x}{x^4} - \frac{3}{x^4}}{\frac{x^2}{x^4} + \frac{3}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}}{\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4}} = \frac{1 - \frac{5}{\infty} + \frac{2}{\infty} - \frac{3}{\infty}}{\frac{1}{\infty} + \frac{3}{\infty}}$$

Ricordando che $\frac{n}{\infty} \rightarrow 0$ segue

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 5x^2 + 2x - 3}{x^2 + 3} = \frac{1 - \frac{5}{\infty} + \frac{2}{\infty} - \frac{3}{\infty}}{\frac{1}{\infty} + \frac{3}{\infty}} = \frac{1 - 0 + 0 - 0}{0 + 0} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 2x - 3}{3x^2 + 4}$$

Procediamo come nell'esercizio precedente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 2x - 3}{3x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{4}{x^2}} = \frac{2 + 0 - 0}{3 + 0} = \frac{2}{3}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 2x - 6}{3x^3 - 1}$$

Anche in questo caso procediamo dividendo per la potenza massima di x .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 2x - 6}{3x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^3} + \frac{2x}{x^3} - \frac{6}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3} - \frac{1}{x^3}} = \frac{0 + 0 - 0}{3 - 0} = \frac{0}{3} = 0$$

Gli esercizi precedenti (nn. 5, 6 e 7) riguardano il calcolo di un limite di una funzione algebrica fratta per x che tende a $+\infty$. Nel primo caso il numeratore è di grado **superiore** rispetto al denominatore e la funzione **diverge**, nel secondo caso numeratore e denominatore sono di **pari grado** e la funzione **converge** verso un valore non nullo (il rapporto dei coefficienti delle x con grado massimo), nel terzo caso il grado del numeratore è **inferiore** a quello del denominatore e la funzione **converge a zero** (è infinitesima). Generalizzando:

Il limite per x che tende a ∞ di una funzione algebrica fratta nella forma $y = \frac{A(x)}{B(x)}$ con $A(x)$ e

$B(x)$ polinomi nella variabile x , è pari a

∞	se il grado di $A(x)$ è maggiore di quello di $B(x)$
$\frac{a}{b}$	se il grado di $A(x)$ è uguale di quello di $B(x)$ (a e b sono i coefficienti della x con grado massimo)
0	se il grado di $A(x)$ è minore di quello di $B(x)$

8. Tabella riassuntiva delle definizioni

Tabella riassuntiva delle definizioni

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$	$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} - \{x_0\} \quad f(x) - \ell < \varepsilon$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$	$\forall M > 0 \quad \exists I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} - \{x_0\} \quad f(x) > M$
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$	$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k > 0 : \forall x > k \quad f(x) - \ell < \varepsilon$
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	$\forall M > 0 \quad \exists k > 0 : \forall x > k \quad f(x) > M$

Tutte le definizioni con infinito

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$	$\forall M > 0 \quad \exists I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} - \{x_0\} \quad f(x) > M$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$	$\forall M > 0 \quad \exists I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} - \{x_0\} \quad f(x) < -M$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	$\forall M > 0 \quad \exists k > 0 : \forall x > k \quad f(x) > M$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$	$\forall M > 0 \quad \exists k > 0 : \forall x > k \quad f(x) < -M$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$	$\forall M > 0 \quad \exists k > 0 : \forall x < -k \quad f(x) > M$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	$\forall M > 0 \quad \exists k > 0 : \forall x < -k \quad f(x) < -M$