Equazioni di secondo grado

Introduzione

Un'equazione si dice **di secondo grado** (o **quadratica**) quando l'incognita x vi compare con potenza 2. Nella forma normale, un'equazione di secondo grado polinomiale si scrive:

$$\boldsymbol{a x^2+b x+c=0}$$

con a, b e c costanti e $a \neq 0$. Per il teorema fondamentale dell'algebra, un'equazione di secondo grado ha **due soluzioni** (di solito indicate con x_1 e x_2) che possono essere determinate mediante l'uso di una *formula risolutiva*. Tali soluzioni sono anche dette *radici* dell'equazione. Prima di passare alla formula risolutiva delle equazioni di secondo grado, conviene soffermarsi su alcuni casi particolari che si verificano quando uno dei coefficienti dell'equazione è nullo.

Equazioni quadratiche incomplete

- ➔ Equazione spuria

Si dice **equazione quadratica spuria** un'equazione quadratica che manca del termine noto, cioè che ha $\boldsymbol{c = 0}$. Essa si presenta nella forma:

$$\boldsymbol{a x^2+b x=0}$$

Un'equazione di questo tipo si risolve facilmente tramite scomposizione in fattori:

$$x\cdot(a x+b)=0$$

Essendo il prodotto uguale a zero, per la legge di annullamento del prodotto almeno uno dei fattori deve essere uguale a zero. Dunque, le soluzioni si trovano ponendo uguale a zero i fattori del prodotto presi uno alla volta:

$x=0$ e $a x+b=0$

E, in definitiva, le soluzioni sono $x_1=0$ e $x_2=-\frac{b}{a}$

Esempio:
Risolvere l'equazione: $3x^2+2x=0$.
Raccogliendo la x, si ottiene: $x(3x+2)=0$, e possiamo ricavare subito le soluzioni:

$x_1=0$ e $x_2=-\frac{2}{3}$

- Equazione pura

Si dice **equazione quadratica pura** un'equazione di secondo grado che manca del termine di primo grado, cioè che ha ***b = 0***. Essa ha la forma:

$$\boldsymbol{a\,x^2+c=0}$$

Anche questo tipo di equazione di secondo grado si può risolvere con i metodi di calcolo già noti. Portando *c* al secondo membro e dividendo per *a* si ottiene:

$$x^2=-\frac{c}{a}$$

e, dunque, le due soluzioni sono:

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Naturalmente, l'argomento della radice deve essere positivo affinché le soluzioni esistano e siano reali. Dunque, deve essere: $-\frac{c}{a}\geq 0$.

Esempio:
Risolvere l'equazione: $4\,x^2-1=0$.
Isolando al primo membro il termine x^2, si ha: $x^2=\frac{1}{4}$. Estraendo la radice quadrata, otteniamo le due soluzioni:

$\sqrt{x^2}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}$ => $x_1=-\frac{1}{2}$ e $x_2=\frac{1}{2}$

Equazione quadratica completa

Veniamo, ora, all'equazione polinomiale di secondo grado *completa*, nella quale, cioè, tutti i coefficienti sono diversi da zero. Le due soluzioni si ottengono mediante l'uso di una formula risolutiva. Data l'equazione quadratica:

$$a\,x^2+b\,x+c=0$$

le sue due soluzioni sono:

$$\boldsymbol{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}}$$

L'espressione sotto radice $b^2-4\,a\,c$ è molto importante; essa è detta discriminante e si indica con la lettera delta dell'alfabeto greco: $\Delta=b^2-4\,a\,c$. Il discriminante è così detto in quanto *discrimina* le soluzioni, cioè le rende differenti. Infatti, una volta estratta la radice, essa andrà una volta sommata e una volta sottratta al resto della formula per ottenere le due soluzioni. Vediamo un esempio di applicazione della formula.

Esempio:
Risolvere l'equazione: $x^2-5x+6=0$
Applichiamo la formula risolutiva:

$$x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm1}{2}$$

e, a questo punto, bisogna distinguere le due soluzioni:

$$x_1=\frac{5+1}{2}=3 \quad \text{e} \quad x_2=\frac{5-1}{2}=2$$

In generale, poiché il discriminante si trova sotto radice, esso deve essere non negativo perché l'equazione abbia soluzioni reali. Distinguiamo i tre casi seguenti:

- $\Delta=b^2-4ac>0$ Discriminante positivo

In tal caso è possibile estrarre la radice e si otterranno due soluzioni reali e distinte (cioè diverse tra loro), come nell'esempio precedente.

- $\Delta=b^2-4ac=0$ Discriminante nullo

In questo caso la radice si annulla. Le soluzioni saranno, dunque:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{0}}{2a} \quad => \quad x_1=\frac{-b+\sqrt{0}}{2a}=-\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{0}}{2a}=-\frac{b}{2a}$$

cioè, l'equazione avrà due soluzioni reali uguali tra loro (soluzioni coincidenti).
Ad esempio, nell'equazione: $x^2-6x+9=0$ il discriminante è:

$$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\cdot1\cdot9=36-36=0$$

e, dunque, le due soluzioni sono coincidenti: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{0}}{2a}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{0}}{2\cdot1}=\frac{6}{2}=3$

- $\Delta=b^2-4ac$ Discriminante negativo

In tal caso, non è possibile estrarre la radice nel campo dei numeri reali. Si dice che l'equazione non ha soluzioni reali. Tuttavia, essa ha soluzioni nel campo dei numeri complessi.

Ricapitolando, un'equazione polinomiale di secondo grado ammette sempre due soluzioni, che possono essere:

1. reali e distinte se il discriminante è maggiore di zero
2. reali e coincidenti se il discriminante è uguale a zero
3. soluzioni complesse (o immaginarie) se il discriminante è minore di zero

Relazioni tra coefficienti e soluzioni dell'equazione

Data un'equazione di secondo grado con due soluzioni reali (cioè con discriminante positivo o nullo) è possibile dimostrare che esistono delle relazioni tra le soluzioni dell'equazione e i coefficienti *a*, *b* e *c*. Dette x_1 e x_2 le soluzioni dell'equazione, si ha:

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Queste relazioni permettono, in particolari casi, di ricavare le soluzioni di un'equazione di secondo grado senza applicare la formula risolutiva. Infatti, basta cercare quei numeri la cui somma e il cui prodotto corrispondono ai numeri ottenuti mediante le relazioni. Occorre notare che tali numeri sono facilmente ricavabili quando le soluzioni sono numeri interi.

Scomposizione in fattori di un'equazione di secondo grado

Saper calcolare le radici di un'equazione di secondo grado fornisce anche un modo ulteriore (oltre a quelli già noti) di scomporre in fattori il trinomio corrispondente. Si dimostra, infatti, che se x_1 e x_2 sono le radici di un'equazione di secondo grado: $a x^2 + b x + c = 0$, il polinomio corrispondente si può scomporre in fattori come:

$$\boldsymbol{a x^2 + b x + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

Esempio:

Scomporre in fattori il polinomio: $2x^2 + 5x + 2$

Cominciamo col trovare le radici dell'equazione di secondo grado corrispondente:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4}$$

e, dunque:

$$x_1 = \frac{-5+3}{4} = -\frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{-5-3}{4} = -2$$

Allora, è possibile scomporre in fattori il polinomio nel modo seguente:

$$2x^2 + 5x + 2 = 2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (x+2) = (2x+1)(x+2)$$