Equazioni lineari o di primo grado a una incognita

First-Degree Equations - Résolution des équations du premier degré

Due espressioni numeriche che hanno lo stesso valore e sono separate dal segno di uguale, formano una **uguaglianza numerica**.
$2\cdot 3-1=2\cdot 2+1$

Si possono scrivere nella stessa maniera uguaglianza letterali.

Identità

Una **identità** è una uguaglianza tra due espressioni algebriche, in una o più variabili, che risulti verificata qualsiasi siano i valori numerici attribuiti alle variabili che in essa figurano.
Le uguaglianze che traducono in termini matematici delle frasi vere sono soddisfatte PER QUALSIASI VALORE e si chiamano IDENTITÀ.

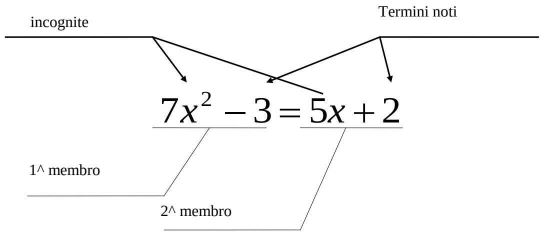
Esempio: x+x=2x *vera per qualsiasi valore di x* $(\forall x \in R)$

Equazioni

Una **equazione** è una uguaglianza tra due espressioni algebriche, in una o più variabili, che risulti verificata solamente per particolari valori attribuiti alle variabili che in essa figurano.
I termini numeri presenti in una equazione prendono il nome di **termini noti**.
Si chiamano **radici** o **soluzioni** dell'equazione i particolari valori attribuiti alle variabili che in essa figurano.
Due equazioni sono **equivalenti** quando hanno la stessa radice.
Risolvere un'equazione significa esplicitare l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione.

Esempio: x+3=7

vera solo per x=4



Una equazione è detta **numerica** se in essa non figurano altre lettere oltre l'incognita.
Una equazione è detta **letterale** se oltre l'incognita figurano altre lettere.
Una equazione è detta **intera** se l'incognita non figura al denominatore.
Una equazione è detta **fratta** se l'incognita figura anche, o solo, al denominatore.

Il **grado** di una equazione è dato dal grado massimo dell'incognita presente nell'equazione.
Il grado di una equazione è pari al numero delle possibili soluzione dell'equazione stessa.

Il **dominio** delle variabili incognite è un insieme di valori per cui l'equazione può essere verificata. Il dominio è fornito di norma unitamente all'equazione. L'insieme delle soluzioni di un'equazione è fortemente condizionato dal dominio.

L'equazione a lato non ammette ad esempio soluzioni nell'insieme dei numeri razionali (Q) ma in quello dei numeri reali (R).

$$x^2 - 2 = 0$$
$$x = \sqrt{2}$$

L'equazione a lato non ammette ad esempio soluzioni nell'insieme dei numeri reali (R) ma nel campo dei numeri complessi.

$$x^2 + 1 = 0$$
$$x = \sqrt{-1}$$

La scrittura **ax=b** è detta **forma normale** di un'equazione di primo grado (equazione lineare) ad una incognita (con *a* e *b* numeri reali o complessi e a diverso da 0).

In geometria analitica, un'equazione lineare a due incognite (scritta in genere nella forma **y = mx + q** oppure **ax + by + c = 0**) rappresenta una retta nel piano cartesiano.

Per le equazioni di secondo grado si rimanda al capitolo relativo.

Per il Teorema di Abel-Ruffini, non esiste una formula generale per la risoluzione delle equazioni polinomiali di grado 5 o superiore.
Fino alle equazioni di quarto grado è nota una formula risolutiva, dopodiché le equazioni sono risolvibili solamente in alcuni casi particolari.

Segue la parte relativa alle **equazioni di primo grado**.

Principi di equivalenza

Primo principio di equivalenza

Aggiungendo ad entrambi i membri di una equazione lo stesso valore numerico o la stessa espressione algebrica si ottiene una equazione equivalente a quella data.

$$4x = 3 + x$$
$$4x - x = 3 + \cancel{x} - \cancel{x}$$
$$3x = 3$$

Da tale principio derivano le seguenti regole.

Se uno stesso termine figura in entrambi i membri di un'equazione può essere soppresso.

$$4x + \cancel{5} = 3 + x + \cancel{5}$$

Se due termini opposti si trovano nello stesso membro possono essere soppressi.

$$+\cancel{5} + 4x - \cancel{5} = 3 + x$$

Si può trasportare un termine di un'equazione da un membro all'altro purché gli si cambi il segno (legge del trasporto).

$$4x = 3 + x \qquad 4x - x = 3$$

La legge del trasporto si utilizza per trasportare tutte le incognite al primo membro e tutti i termini noti al secondo membro.

Secondo principio di equivalenza

Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una equazione algebrica per uno stesso numero diverso da zero, o per una stessa espressione che non si possa annullare, si ottiene una equazione equivalente alla data.

$$3x = 6 \qquad \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$$
$$3x \cdot \frac{1}{3} = 6 \cdot \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{2}x \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 2$$
$$x = 2 \qquad x = 1$$

Da tale principio derivano le seguenti regole.

Se i due membri di un'equazione hanno un fattore numerico comune questo può essere soppresso.

$$\cancel{2} \cdot (x + 2) = \cancel{2} \cdot (3 - x) \qquad x + 2 = 3 - x$$

Cambiando i segni a tutti i termini di una equazione se ne ottiene un'altra equivalente (risulta equivalente a moltiplicare tutti i termini per -1).

$$-x = +2 \qquad +x = -2$$
$$-x = +2 \qquad -x \cdot (-1) = +2 \cdot (-1) \qquad +x = -2$$

Moltiplicando (o dividendo) i due membri di una equazione per una espressione, o numero, conveniente si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

Tale principio si utilizza sia per eliminare denominatori comuni ad entrambi i membri, o per eliminare il coefficiente (parte numerica) della x al momento di calcolarne il valore finale.

$2x = +4$ *dividendo entrambi i membri per 2* $\frac{2}{2}x = +\frac{4}{2}$ *da cui semplificando* $x = +2$

Risoluzione di una equazione di primo grado a una incognita

Risolvere un'equazione vuol dire trovarne le radici o soluzioni.

Può darsi che una equazione non ammetta soluzioni, cioè non esista alcun valore delle incognite che la verifichi; si dice allora che la equazione è **impossibile**.
Data l'equazione nella forma normale ax=b, si dice impossibile se a=0 e b≠0.

$$3x-2=3x-1$$
$$3x-3x=-1+2$$
$$0x=1$$

Nessun numero per zero può dare 1…

Può darsi che una equazione ammetta un numero illimitato di soluzioni; si dice allora che l'equazione è **indeterminata** (in effetti non è una equazione ma è una identità).
Data l'equazione nella forma normale ax=b, si dice indeterminata se a=0 e b=0.

$$3x+2=3(x-1)+5$$
$$3x+2=3x-3+5$$
$$3x-3x=-3+5-2$$
$$0x=0$$

Qualsiasi numero per zero restituisce 0…

Una equazione che ammette un numero finito di soluzioni si dice **determinata**.
Data l'equazione nella forma normale ax=b, si dice determinata se a≠0.
Si **verifica** se il valore trovato è la radice dell'equazione sostituendo tale valore all'incognita dell'equazione e verificando che i due membri diano lo stesso valore (l'uguaglianza risulta vera).

$$3x+1=2x+2$$
$$3x-2x=2-1$$
$$x=1$$

Solo e solamente 1 rende vera l'uguaglianza…

$$3x+1=2x+2$$
$$3\cdot1+1=2\cdot1+2$$
$$3+1=2+2$$
$$4=4$$

Verificata.

=-=

Sitografia

Esercizi risolti su UbiMath www.pernigo.com
www.toomates.net/ Matemàtiques per a la diversitat – di Gerad Tomo
www.slidermath.com/ Slider Math – Gioca con le equazioni