Asintoti di una funzione

Definizione:

Un **asintoto** è una retta tale che la distanza tra essa e la curva della funzione $y = f(x)$ tende a 0 per $x \to \infty$ (asintoti orizzontali o obliqui) o per x che tende ad un punto ove la f non è definita o è discontinua (asintoti verticali).

Vediamo la definizione e le osservazioni riportata da Wikipedia

" In matematica espressioni come "avvicinarsi indefinitamente" (o l'equivalente "tendere a") non sono definite rigorosamente se non utilizzando in modo esplicito il concetto di limite. Volendo adottare un linguaggio più conforme a quello che si impiega nello studio dei limiti si può dire che la curva A è un asintoto della curva C se comunque si fissi una distanza minima esiste un tratto non limitato della curva C che dista dall'asintoto A meno della distanza minima fissata.

In generale la curva C può intersecare anche più volte il suo asintoto A. Tuttavia ciò che rende A un asintoto di C è il fatto che C si avvicina ad A per un tratto illimitato senza mai coincidere con A, e questo a prescindere da eventuali altre occasionali intersezioni. Questo rende ragione anche della etimologia del termine, che deriva dal greco *a-sym-ptōtos*, dove *a-* ha un valore privativo, mentre *sym-ptōtos* è composto da *sym-*, "con", e *ptōtos*, un aggettivo che connota ciò che "cade". Dunque *sym-ptōtos* descrive ciò che "cade assieme", ovvero ciò che "interseca", e *a-sym-ptōtos* etimologicamente descrive ciò che "non interseca", nel senso che si diceva poco fa. Volendo si può fare ricorso ad un linguaggio figurato e dire che oltre alle eventuali intersezioni finite c'è una "intersezione all'infinito" fra A e C, e che a tale intersezione ci si può avvicinare indefinitamente senza mai raggiungerla. È questa particolare "intersezione all'infinito" che rende A "asintoto" di C.

Il termine **asintoto** è utilizzato in matematica per denotare una retta, o più generalmente una curva, che si avvicina indefinitamente ad una curva data. Con il termine *asintoto*, senza ulteriori specificazioni si intende genericamente una retta, a meno che dal contesto non emerga un altro significato, quando si vuole essere più specifici si parla di **retta asintotica** o, più in generale, di **curva asintotica**. "

Possiamo classificare **tre tipi** di asintoti:

Asintoti Verticali

Si dice che la retta $\boldsymbol{x = c}$ è un <u>asintoto verticale</u> per la funzione $y = f(x)$ se c'è un punto singolare $\boldsymbol{c}$ (punto di accumulazione escluso dal dominio) in cui si abbia:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$$

In pratica la curva si accosta sempre più ad una retta di equazione $x = c$ ed è il valore c (se esiste) ciò che dobbiamo determinare (pertanto una funzione che non abbia punti singolari non può avere asintoti verticali).

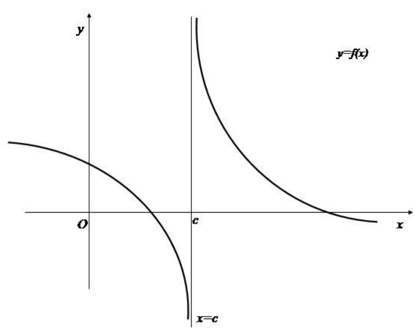

fig.1 – asintoto verticale

Asintoti Orizzontali

Si dice che la retta ***y* = *k*** è un asintoto orizzontale per la funzione $y = f(x)$ se si verifica una delle seguenti condizioni:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = k \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = k$$

dove ***k*** è un numero reale. In pratica la curva si accosta sempre più ad una retta di equazione *y*=*k* ed in questo caso è il numero *k* quel che dobbiamo determinare.

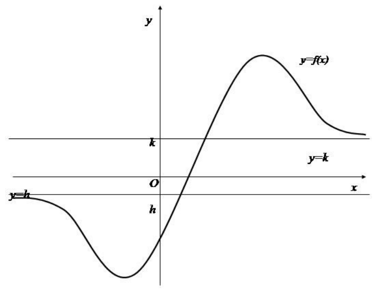

fig.2 – asintoto orizzontale

Se si effettua il limite per x tendente verso $-\infty$ si parla di Asintoto Orizzontale Sinistro (A.O.S.), se si effettua il limite per x tendente verso $+\infty$ si parla di Asintoto Orizzontale Destro (A.O.D.). I due asintoti possono coincidere (A.O.).

Asintoti Obliqui

Se non esiste l'asintoto orizzontale dobbiamo cercare l'eventuale asintoto obliquo (e ciò dobbiamo farlo sia a destra per x tendente verso $+\infty$, che a sinistra per per x tendente verso $-\infty$). Una retta si dice asintoto obliquo se il il grafico della funzione si accosta (quando *x* tende a più o meno infinito) a quello di una retta di equazione ***y*=*mx*+*q*** (dove $m \neq 0$, altrimenti si tratterebbe di un asintoto orizzontale). Bisogna quindi determinare i valori *m* (coefficiente angolare) e *q* (ordinata all'origine).

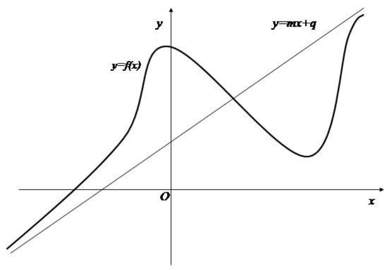

fig.3 – asintoto obliquo

Si ha:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{con } m \in \Re \text{ e } m \neq 0 \text{ (ovvero un numero reale diverso da zero)}$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] \qquad \text{con } q \in \Re \text{ (ovvero un numero reale)}$$

La retta $y = mx + q$, in tal caso, si dice Asintoto Obliquo Destro (A.Ob.D.). Lo stesso tipo di indagine va compiuta per *x* che tende a meno infinito (A.Ob.S.)

Annotazioni

1. La presenza di eventuali asintoti verticali è indipendente dalla presenza di altri tipi di asintoti.
2. Possono esistere infiniti asintoti verticali (ad es. la funzione $y = tg(x)$ presenta infiniti A.V.) come ne possono esistere in un numero finito oppure possono non esistere (dipende, ovviamente, dal dominio della funzione).
3. Possono esistere al più due asintoti orizzontali
4. Una funzione definita in un dominio limitato non presenta né asintoti orizzontali né obliqui.
5. Se non esiste l'asintoto orizzontale non è detto che esista quello obliquo.
6. Possono esistere sia asintoto orizzontale sia obliquo, ma da parti opposte rispetto al grafico (ad es. esistono l'A.O.D. e l'A.Ob.S.)
7. Una funzione può non presentare nessun asintoto (ad es. la funzione $y = x^2 - x - 4$ il cui grafico è una parabola) oppure presentare tutti e tre i tipi di asintoti (vedi fig. 4)

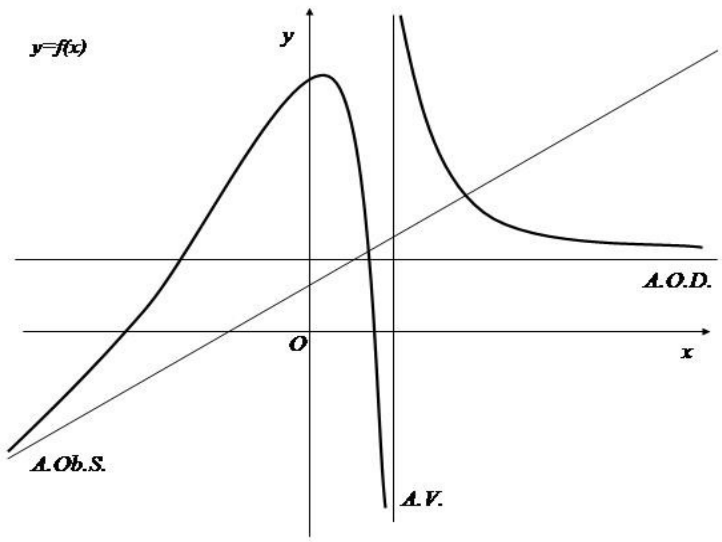

fig. 4 – grafico di funzione con i tre asintoti