CORSO ZERO DI MATEMATICA
per Ing. Chimica e Ing. delle Telecomunicazioni
"GEOMETRIA ANALITICA"
Prof. Erasmo Modica
erasmo@galois.it
www.galois.it

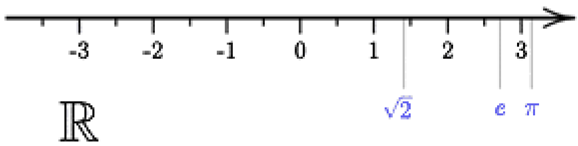
LE COORDINATE CARTESIANE

Quando si vuole fissare un sistema di coordinate cartesiane su una retta *r*, è necessario considerare:

- un punto *O* detto ***origine***;
- un verso di percorrenza;
- un punto *P* a destra di *O* in modo la lunghezza del segmento OP sia l'unità di misura.

Definizione: Dicesi ***ascissa*** di un punto *P* della retta *r*, la misura del segmento *OP*.

In generale la misura del segmento orientato *PQ* è ***positiva*** quando *P* precede *Q*, ***negativa*** quando *P* segue *Q*.
In questo modo si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i numeri reali ed i punti della retta.

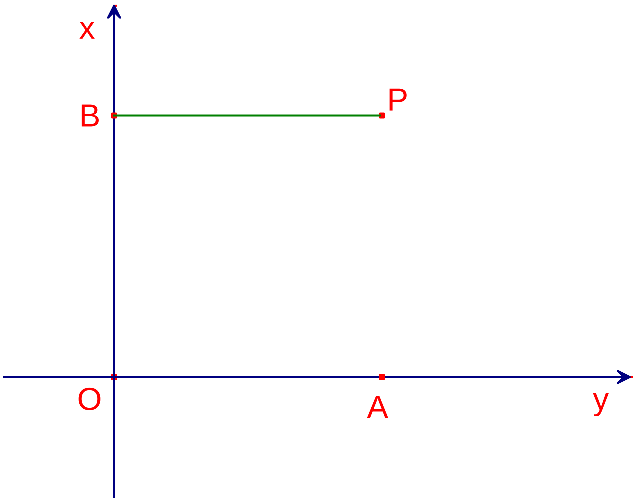


COORDINATE CARTESIANE NEL PIANO

Se si vuole fissare un sistema di coordinate cartesiane nel piano, si procede in maniera analoga a quanto fatto nel caso della retta, cioè:

- si considerano due rette orientate *x* e *y* nel piano tra loro perpendicolari e si indica con *O* il loro punto di intersezione;
- si fissa una unità di misura *u* comune alle due rette.

Le rette considerate dividono in piano in quattro parti e il sistema che si viene a formare prende il nome di ***piano cartesiano ortogonale***. Le rette *x* e *y* prendono il nome di ***asse delle ascisse*** e ***asse delle ordinate*** ed il loro punto di intersezione viene detto ***origine del sistema***.
Preso un qualsiasi punto *P* del piano se si tracciano le perpendicolari agli assi cartesiani, i loro piedi individuano due segmenti, uno sull'asse delle ascisse e uno sull'asse delle ordinate. Al punto *P* si può associare una coppia ordinata di numeri reali (x, y) che rappresentano, rispettivamente, la misura del segmento orientato *OA* e la misura del segmento *OB*. Tali numeri prendono il nome di ***coordinate cartesiane del punto P*** e, in particolare, *x* viene detto ***ascissa*** e *y* ***ordinata*** di *P*.



Le rette ortogonali suddividono il piano in quattro quadranti che vengono numerati in senso antiorario a partire dal quadrante in alto a destra. Le coordinate dei punti possono quindi essere sia positive che negative, in particolare:

- i punti del I quadrante hanno ascissa e ordinata positiva;
- i punti del II quadrante hanno ascissa negativa e ordinata positiva;
- i punti del III quadrante hanno sia ascissa che ordinata negativa;
- i punti del IV quadrante hanno ascissa positiva e ordinata negativa.

È bene osservare che così come ogni punto determina una coppia di numeri, una coppia di numeri reali determina un unico punto del piano cartesiano. Per tale ragione esiste una corrispondenza biunivoca tra il prodotto cartesiano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e l'insieme dei punti del piano:

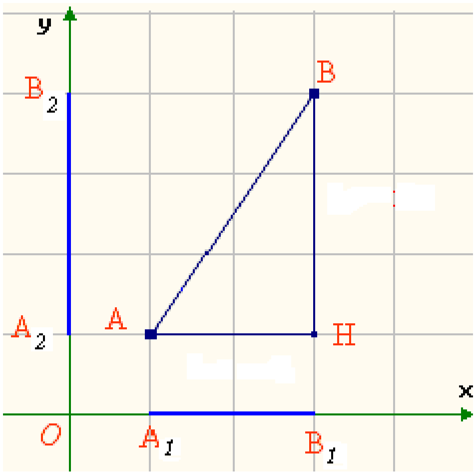
$$\mathbb{R}\times\mathbb{R} \qquad \leftrightarrow \qquad \{insieme\ dei\ punti\ del\ piano\}$$

DISTANZA ASSOLUTA TRA DUE PUNTI DEL PIANO

Uno dei primi problemi che ci si presentano in geometria analitica è quello di calcolare la distanza tra due punti del piano cartesiano. Si vuole quindi determinare, dati i punti $A(x_1,y_1)$ e $B(x_2,y_2)$, la loro distanza.

Dalla figura a lato si deduce che:

$$\overline{OA_1}=x_1 \qquad \overline{OA_2}=x_2$$
$$\overline{OB_1}=y_1 \qquad \overline{OB_2}=y_2$$
$$\overline{A_1B_1}=|x_2-x_1| \qquad \overline{A_1B_1}=|y_2-y_1|$$



Quindi:

$$\overline{AH}=|x_2-x_1| \qquad \overline{BH}=|y_2-y_1|$$

e, per il Teorema di Pitagora, si ha:

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Osservazione: In particolare quando i punti hanno la stessa ascissa o la stessa ordinata, la formula si riduce a una delle due:

$$\overline{AB} = |y_2 - y_1| \qquad \overline{AB} = |x_2 - x_1|$$

Inoltre la distanza di un punto A dall'origine O è data dalla formula:

$$\overline{AO} = \sqrt{x_A{}^2 + y_A{}^2}$$

PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

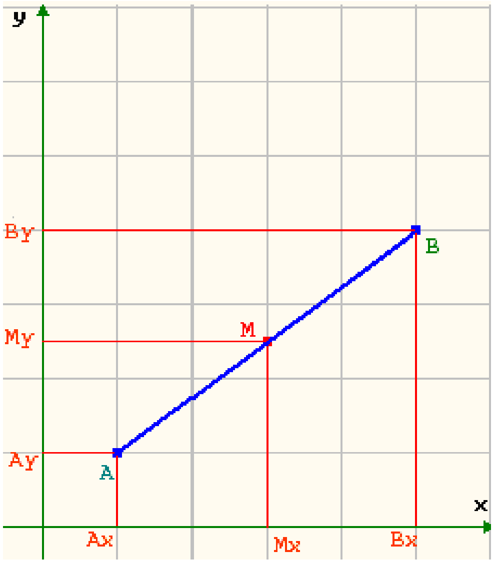
Vogliamo trovare le coordinate del punto medio M di un segmento i cui estremi sono i punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

Sia M il punto medio del segmento AB, allora, anche M_y è il punto medio di B_yA_y ed M_x è il punto medio di B_xA_x. Inoltre se M_x è il punto medio di B_xA_x allora:

$$x_M = OA_x + \frac{A_xB_x}{2} = x_A + \frac{x_B - x_A}{2} = \frac{2x_A + x_B - x_A}{2} = \frac{x_A + x_B}{2}$$
$$y_M = OA_y + \frac{A_yB_y}{2} = y_A + \frac{y_B - y_A}{2} = \frac{2y_A + y_B - y_A}{2} = \frac{y_A + y_B}{2}$$

In definitiva:

$x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$	$y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$



Esempio: Calcolare il punto medio del segmento avente come estremi i punti di coordinate $\boldsymbol{A(-3,1)}$ e $\boldsymbol{B(-1,3)}$.

Applicando le formule precedentemente determinate si ha:

$$x_M = \frac{-3-1}{2} = -2$$
$$y_M = \frac{1+3}{2} = 2$$

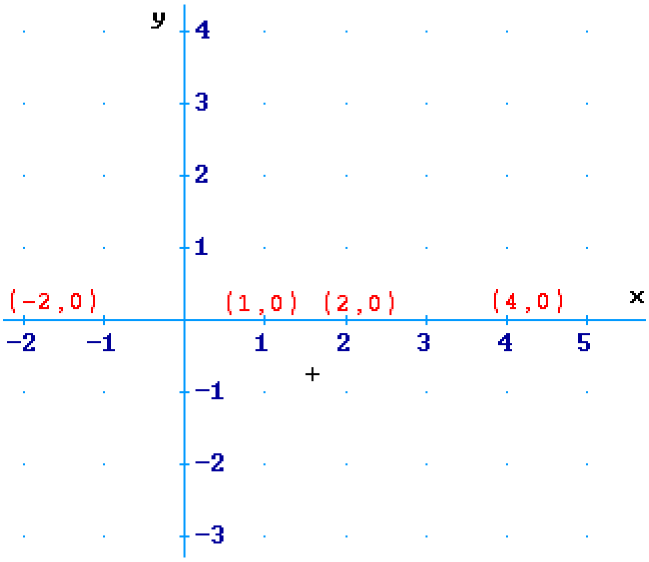
LA RETTA

Dimostriamo adesso che ogni retta del piano cartesiano può essere rappresentata mediante una equazione di primo grado.

ASSE DELLE ASCISSE

Dalla figura è semplice notare che tutti i punti dell'asse delle ascisse sono caratterizzati dall'avere la seconda coordinata nulla. Tale asse è quindi il luogo geometrico dei punti del piano aventi la seconda coordinata nulla. Algebricamente si ha:

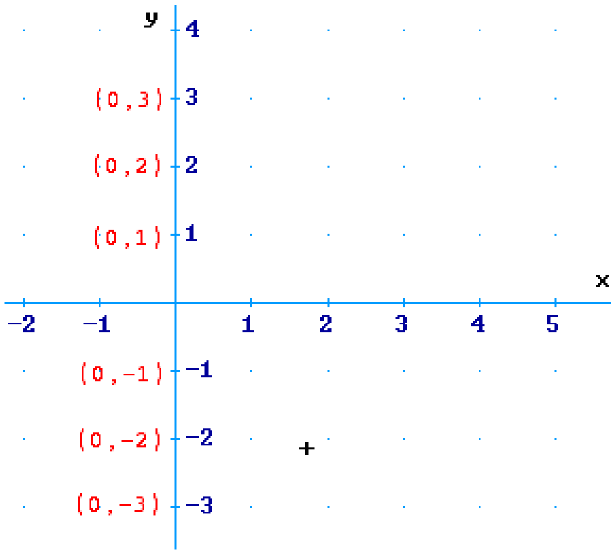
$$y = 0$$



ASSE DELLE ORDINATE

Dalla figura è semplice notare che tutti i punti dell'asse delle ordinate sono caratterizzati dall'avere la prima coordinata nulla. Tale asse è quindi il luogo geometrico dei punti del piano aventi la prima coordinata nulla. Algebricamente si ha:

$$x = 0$$

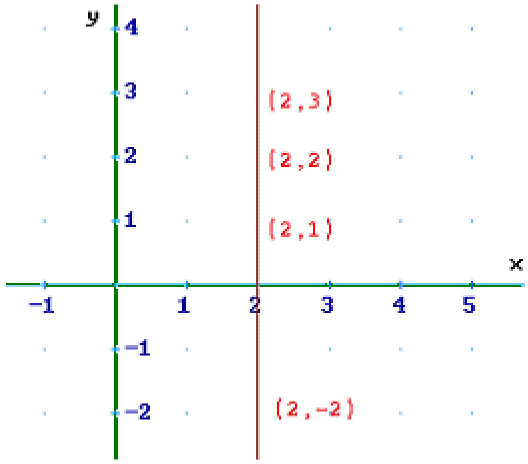


RETTA PARALLELA ALL'ASSE DELLE ORDINATE

È intuitivo notare che ogni retta parallela all'asse delle ordinate è costituita da un insieme di punti aventi uguale la prima coordinata. Algebricamente tale condizione si traduce mediante l'equazione:

$$x = h$$

con $h \in \mathbb{R}$.

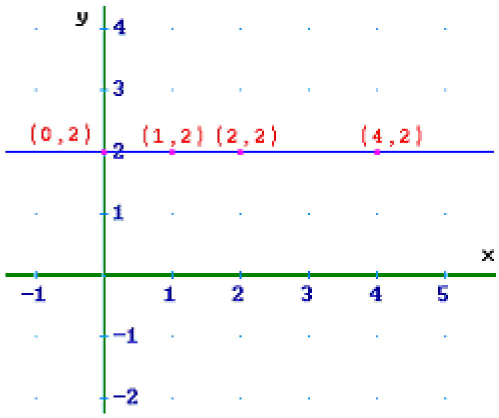


RETTA PARALLELA ALL'ASSE DELLE ASCISSE

È intuitivo notare che ogni retta parallela all'asse delle ascisse è costituita da un insieme di punti aventi uguale la seconda coordinata. Algebricamente tale condizione si traduce mediante l'equazione:

$$y = k$$

con $k \in \mathbb{R}$.



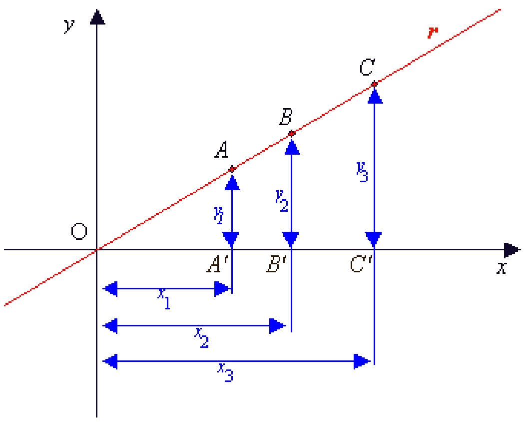
RETTA PASSANTE PER L'ORIGINE

Si consideri una retta passante per l'origine si scelgano su di essa un numero arbitrario di punti. Per fissare le idee consideriamo i punti $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, …

È semplice dimostrare che i triangoli *OAA'*, *OBB'*, *OCC'*, ... sono simili e quindi sussiste la relazione:

$$\frac{AA'}{OA'} = \frac{BB'}{OB'} = \frac{CC'}{OC'} = \dots$$

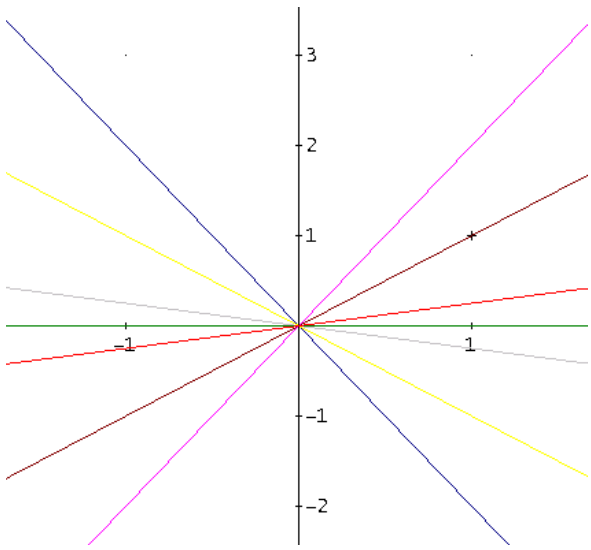
$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \dots = m$$



dove con m si indica il rapporto costante. Dato che la relazione è valida per qualsiasi punto della retta considerata, possiamo concludere che i punti di tali retta costituiscono il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante il rapporto tra la loro ordinata e la loro ascissa.
In formule, considerato il generico punto $P(x, y)$ si ha:

$$\frac{y}{x} = m, \text{ cioè } y = mx$$

La costante m prende il nome di ***coefficiente angolare*** e ci dà informazioni sulla pendenza della retta, cioè sull'angolo che essa forma con l'asse delle ascisse. In generale se il coefficiente angolare è positivo la retta forma con l'asse delle ascisse un angolo acuto, se il coefficiente angolare è negativo l'angolo formato è ottuso.



RETTA GENERICA

Si dimostra che l'equazione di una generica retta nel piano cartesiano che non rientri in uno dei casi precedentemente studiati è:

$$y = mx + q$$

La costante m viene ancora chiamata coefficiente angolare e q viene detta ***intercetta*** o ***ordinata all'origine***, e rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta r con l'asse y.
Abbiamo in pratica fatto vedere che presa una qualunque retta nel piano cartesiano, la sua equazione è sempre una equazione di primo grado.

PARALLELISMO E PERPENDICOLARITÀ DI RETTE

PARALLELISMO DI RETTE

Come osservato in precedenza, il coefficiente angolare esprime la pendenza di una retta, cioè la sua inclinazione rispetto all'asse delle ascisse. È facile intuire che due rette parallele sono inclinate allo stesso modo rispetto al suddetto asse, di conseguenza i loro coefficienti angolari sono uguali.

Teorema: *Date le rette* $y = mx + q$ *e* $y = m'x + q'$*, non parallele all'asse delle ordinate, esse sono parallele se, e solo se, hanno lo stesso coefficiente angolare, cioè:*

$$m = m'$$

Esempio: Le rette $y = 3x - 2$ e $y = 3x - \frac{1}{2}$ sono parallele, in quanto hanno lo stesso coefficiente angolare.

PERPENDICOLARITÀ DI RETTE

Teorema: *Date le rette* $y = mx + q$ *e* $y = m'x + q'$*, non parallele agli assi, esse sono perpendicolari se, e solo se,il prodotto dei loro coefficienti angolari è uguale a -1, cioè:*

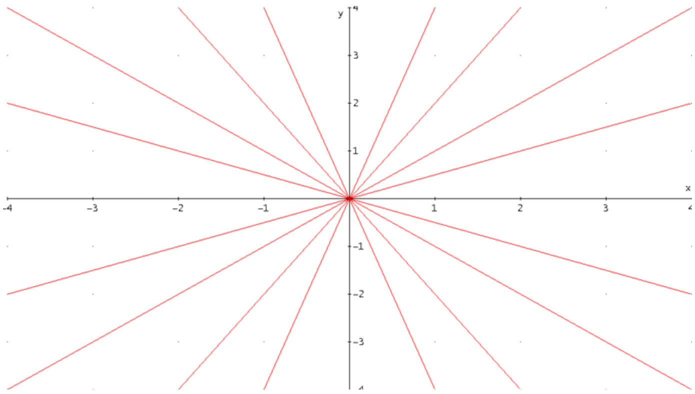
$$m \cdot m' = -1$$

Esempio: Le rette $y = 3x - 2$ e $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$ sono perpendicolari, in quanto il prodotto dei loro coefficienti angolari è pari a -1.

FASCI DI RETTE

FASCIO PROPRIO

Definizione: Dicesi ***fascio proprio di rette*** l'insieme di tutte le rette del piano passanti per un punto fisso detto ***centro*** del fascio.



Si dimostra che dato il centro $P(x_0, y_0)$, la totalità delle rette passanti per P ha equazione del tipo:

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

Osservazione: Come si può notare dall'equazione, tutte le rette del fascio passano per il punto P e la totalità delle rette si ottiene assegnando diversi valori al coefficiente angolare m.

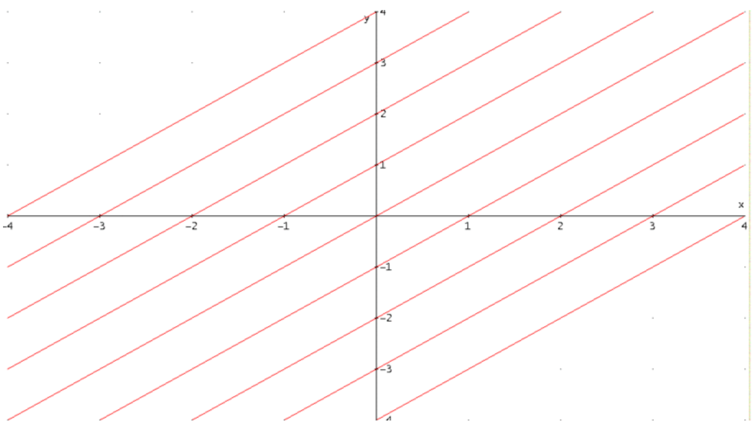
Esempio: *Scrivere l'equazione del fascio di rette passante per il punto* $P(1,2)$.

Si ha:

$$y - 2 = m(x - 1)$$

FASCIO IMPROPRIO

Definizione: Dicesi ***fascio improprio di rette*** l'insieme di tutte le rette del piano parallele ad una retta data detta ***base*** del fascio.



Erasmo Modica, 2008/2009
www.galois.it

Nel caso di un fascio improprio di rette, l'inclinazione di tutte le rette non varia e, di conseguenza, il loro coefficiente angolare rimane sempre *m*. Ciò che differenzia le varie rette è la loro intersezione con l'asse delle ordinate, ovvero l'intercetta all'origine. Di conseguenza l'equazione del fascio di rette parallele a una retta data $y = mx + q$ è:

$$\boxed{y = mx + k}$$

Esempio: *Scrivere l'equazione del fascio improprio di rette avente come retta base la retta di equazione* $y = 3x - 5$.

Si ha:

$$y = 3x + k$$

POSIZIONE RECIPROCA DI DUE RETTE

Date due rette nel piano, si possono presentare le seguenti possibilità:

1. le due rette sono coincidenti;
2. le due rette sono incidenti;
3. le due rette sono parallele.

Per studiare la posizione di due rette nel piano basta studiare il sistema avente come equazioni le due equazioni delle rette considerate, cioè:

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = m'x + q' \end{cases}$$

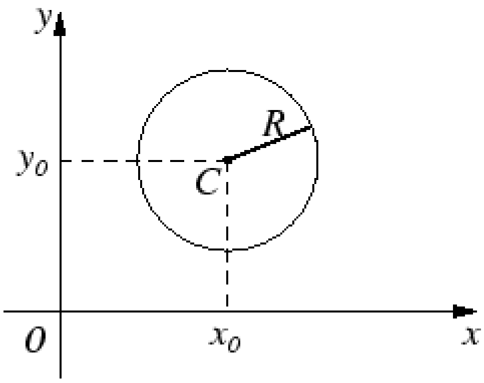
Si osserva facilmente che:

1. se il sistema è ***indeterminato***, allora le rette sono ***coincidenti***;
2. se il sistema è ***determinato***, allora le rette sono ***incidenti***;
3. se il sistema è ***impossibile***, allora le rette sono ***parallele***.

CIRCONFERENZA

<u>Definizione</u>: Dicesi ***circonferenza*** il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto centro. Tale distanza comune a tutti i punti prende il nome di ***raggio*** della circonferenza.

$$\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{2}} : \overline{\boldsymbol{PC}} = \boldsymbol{r}, \boldsymbol{con}\ \boldsymbol{r} \geq \boldsymbol{0}\}$$



Equazione della circonferenza di centro $\boldsymbol{C(x_0, y_0)}$ e raggio $\boldsymbol{r}$: $\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}$

Equazione della circonferenza di centro $\boldsymbol{C(0,0)}$ e raggio $\boldsymbol{r}$: $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$

Equazione della generica circonferenza: $\boxed{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}$

$$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

<u>Intersezione fra 2 circonferenze</u> → Basta intersecarne una con l’asse radicale:

Asse radicale: $(a - a')x + (b - b')y + c - c' = 0$ Γ_1 - Γ_2

<u>Fascio di circonferenze</u>: Tutte le circonferenze del fascio di equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c + k(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0$$

hanno i centri appartenenti ad una medesima perpendicolare all'asse radicale delle due circonferenze se γ_1 e γ_2 hanno 2 punti in comune ➔ tutte le circonferenze del fascio passano per tali punti (*punti base*)