CORSO ZERO DI MATEMATICA

per Ing. Chimica e Ing. delle Telecomunicazioni

"GONIOMETRIA E TRIGONOMETRIA"

Prof. Erasmo Modica

erasmo@galois.it

www.galois.it

RADIANTI E CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Definizione: Si dice ***angolo*** ciascuna delle due parti in cui un piano è diviso da due semirette aventi la stessa origine.

Definizione: Dicesi ***arco*** (di circonferenza) l'intersezione tra una circonferenza e un angolo al centro della circonferenza stessa.

Definizione: Si definisce ***grado*** la 360ª parte dell'angolo giro.

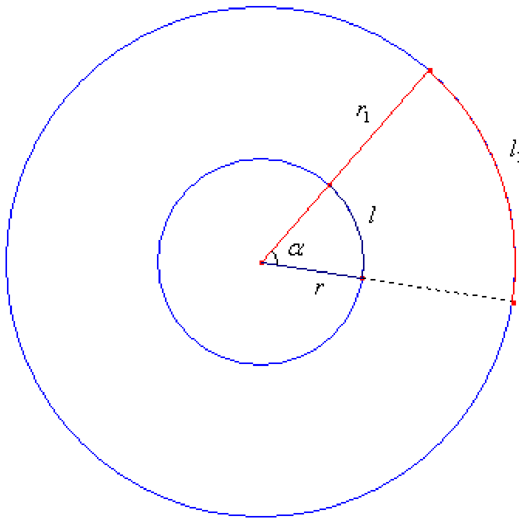
MISURA IN RADIANTI

Consideriamo un angolo α al centro di due circonferenze C e C_1 di raggi r e r_1. Detti l e l_1 gli archi corrispondenti, si ha che:

$$l : l_1 = r : r_1$$

Cioè: *date due circonferenze, due archi che sottendono angoli al centro "uguali", sono proporzionali ai rispettivi raggi*.

Se le circonferenze sono concentriche si ha che: *se un angolo al centro di una circonferenza corrisponde ad un arco lungo quanto il raggio, allora lo stesso angolo corrisponde, su qualsiasi altra circonferenza concentrica alla prima, ad un arco lungo quanto il raggio*.



Definizione: Si definisce ***radiante*** l'angolo al centro di una circonferenza che corrisponde ad un arco di lunghezza uguale al raggio.

Se g è la misura in gradi di un angolo e α la misura in radianti dello stesso angolo, si ha:

$$360° : 2\pi = g : \alpha$$

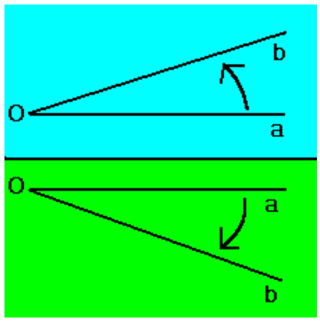
cioè:

$$\alpha = \frac{\pi}{180} \cdot g$$

$$g = \frac{180}{\pi} \cdot \alpha$$

GRADI	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°	270°	360°
RADIANTI	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Definizione: Si definisce ***angolo orientato*** un angolo pensato come l'insieme di tutte le sue semirette uscenti dal vertice, che siano state ordinate secondo uno dei due versi possibili.

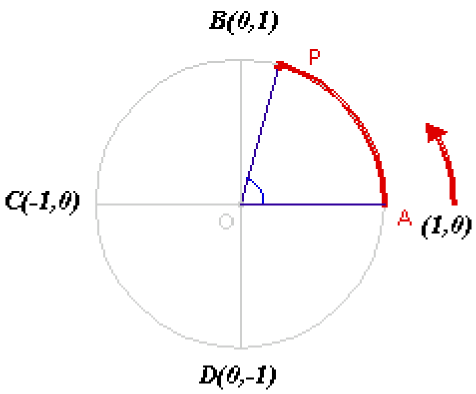


Definizioni: Un angolo orientato $\widehat{ab}$ di centro O si dice ***orientato positivamente*** quando il lato a deve ruotare in senso antiorario intorno ad O per sovrapporsi a b. Si dice ***orientato negativamente*** se la stessa rotazione avviene in senso orario.

CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Definizione: Una circonferenza si dice ***orientata*** quando su di essa è fissato un verso di percorrenza.

Definizione: Una ***circonferenza goniometrica*** è una circonferenza che ha centro nell'origine degli assi cartesiani e raggio unitario.



Si assume che il punto A sia l'origine degli archi, e che il lato OA sia l'origine degli archi. Inoltre si considera come positivo il verso antiorario. Quando il punto P, partendo da A, percorre interamente la circonferenza, gli archi $\widehat{AA}$, $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{AD}$ e $\widehat{AA}$ sono rispettivamente 0°, 90°, 180°, 270°, 360°, in radianti: 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π.

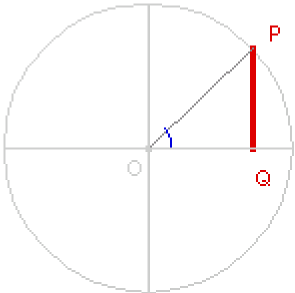
Consideriamo un punto P sulla circonferenza e sia $\widehat{AP}$ l'arco di origine A e di estremo P. Sia α la misura in gradi di $\widehat{AP}$. L'ordinata e l'ascissa di P sono funzioni dell'angolo α, cioè ad ogni valore di α corrisponde un determinato valore sia per l'ordinata che per l'ascissa del punto.

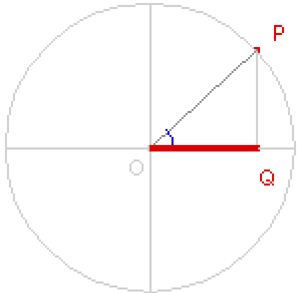
Definizioni: Dicesi ***seno*** di un arco sulla circonferenza goniometrica, l'ordinata dell'estremo dell'arco, cioè:

$$\sin\alpha = PQ$$

Dicesi ***coseno*** di un arco sulla circonferenza goniometrica, l'ascissa dell'estremo dell'arco, cioè:

$$\cos\alpha = OQ$$





Si tracci ora la tangente alla circonferenza goniometrica nel punto A e sia T il suo punto d'intersezione con il prolungamento del segmento OP. L'ordinata del punto T è una funzione dell'angolo α.

<u>Definizione</u>: Dicesi ***tangente*** di un arco sulla circonferenza goniometrica l'ordinata del punto d'intersezione fra la tangente alla circonferenza goniometrica nel punto di origine degli archi e il prolungamento del segmento che unisce il centro della circonferenza con l'estremo dell'arco, cioè:

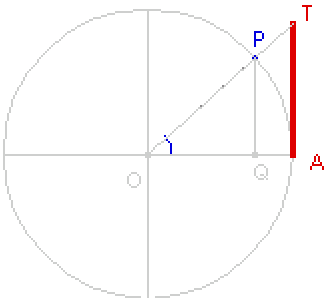
$$\tan\alpha = AT$$

Dalla proporzione $OA : OT = OQ : OP$ segue che:

$$1 : \tan\alpha = \cos\alpha : \sin\alpha$$

da cui:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$



Le funzioni $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ e $\tan\alpha$ prendono il nome di ***funzioni circolari*** o ***funzioni goniometriche*** o ***funzioni trigonometriche***.

	$0 < \alpha < 90°$	$90° < \alpha < 180°$	$180° < \alpha < 270°$	$270° < \alpha < 360°$
$\sin\alpha$	**Positivo**	**Positivo**	**Negativo**	**Negativo**
$\cos\alpha$	**Positivo**	**Negativo**	**Negativo**	**Positivo**
$\tan\alpha$	**Positiva**	**Negativa**	**Positiva**	**Negativa**

Consideriamo il triangolo APQ, per il teorema di Pitagora si ha:

$$OQ^2 + PQ^2 = OP^2 = 1.$$

Poiché $OQ = \cos\alpha$ e $PQ = \sin\alpha$, si ottiene:

$$\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$$

che prende il nome di ***relazione fondamentale della goniometria***.

Da questa relazione segue che:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \qquad \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

Inoltre la tangente dell'angolo α, come visto, risulta:

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Si definisce ***cotangente*** dell'angolo α il reciproco della funzione tangente:

$$\boxed{\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

Le funzioni $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ sono funzioni ***periodiche*** di periodo 360°, cioè:

$$\sin(\alpha + k\cdot 360°) = \sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + k\cdot 360°) = \cos\alpha$$

mentre le funzione $\tan\alpha$ e $\cot\alpha$ hanno periodo 180°, cioè:

$$\tan(\alpha + k\cdot 180°) = \tan\alpha$$
$$\cot(\alpha + k\cdot 180°) = \cot\alpha$$

Nella seguente tabella sono riportati i valori delle funzioni goniometriche di particolari angoli.

	0°	***90°***	***180°***	***270°***	***360°***
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	∞	0	∞	0
$\cot\alpha$	∞	0	∞	0	∞

Osservazioni:

1. La funzione seno e la funzione coseno sono limitate al variare dell'angolo, cioè i loro valori sono sempre interni all'intervallo $[-1,1]$.
2. Le funzioni tangente e cotangente sono illimitate al variare dell'angolo, di conseguenza i loro valori variano in $\mathbb{R}$.

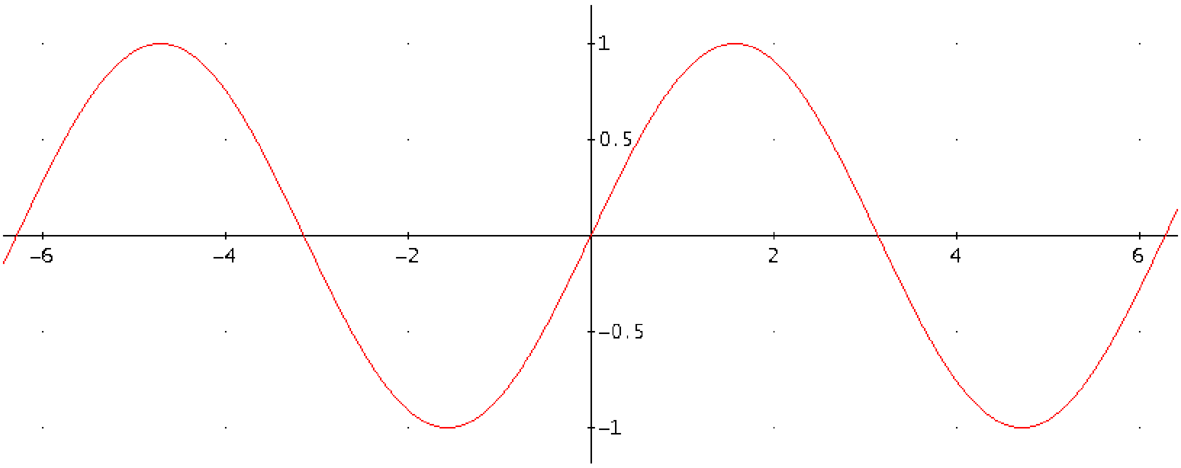
PARTICOLARI VALORI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE

Gradi	*Radianti*	*seno*	*coseno*	*tangente*	*cotangente*
0°	0	0	1	0	*non è definita*
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	*non è definita*	0
180°	π	0	-1	0	*non è definita*
270°	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	*non è definita*	0
360°	2π	0	1	0	*non è definita*

GRAFICI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE

GRAFICO DI $y = \sin x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	1



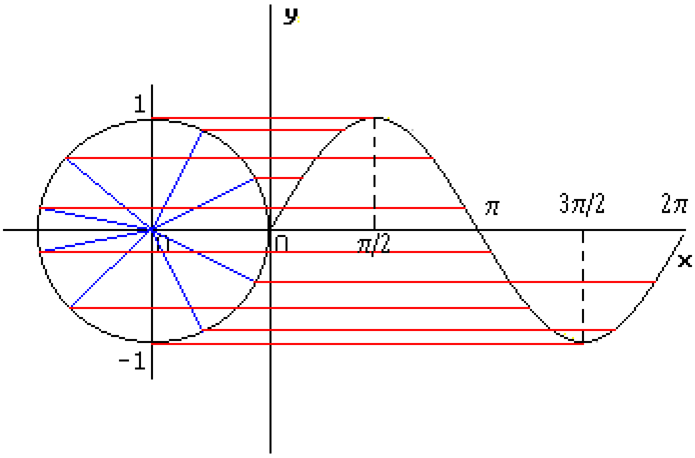
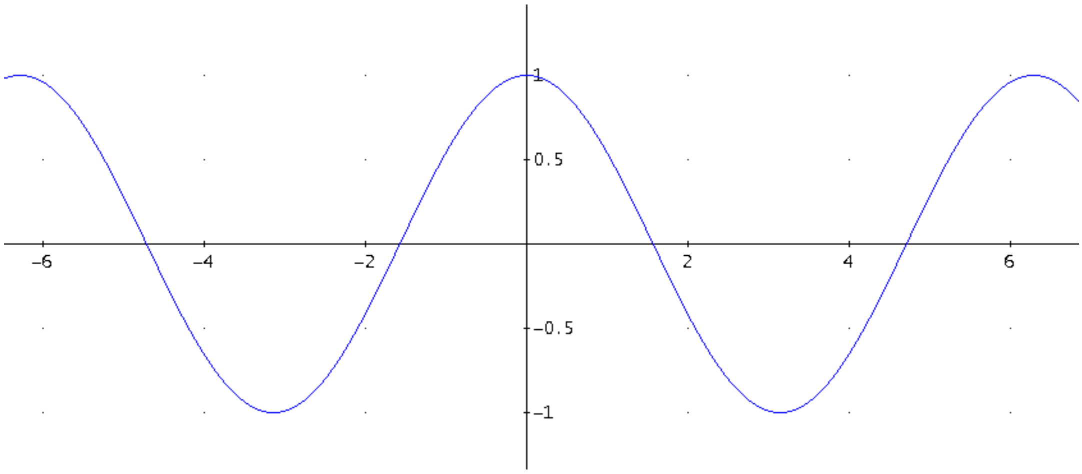


GRAFICO DI $y = \cos x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$y = \cos x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1



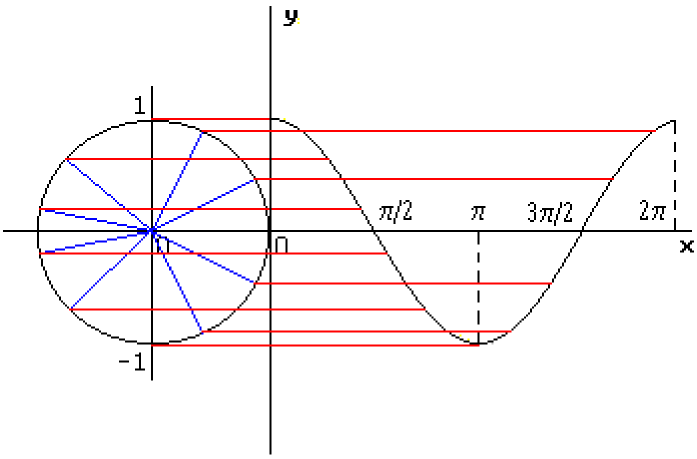


GRAFICO DI $y = \tan x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$y = \tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0

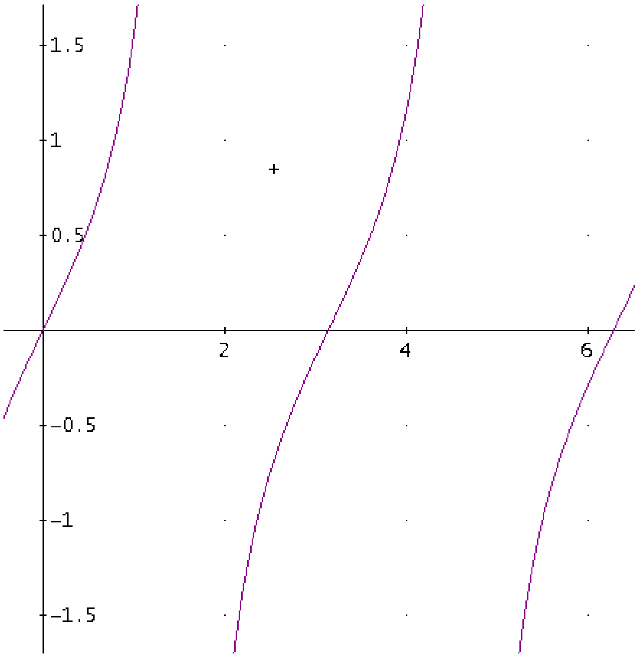
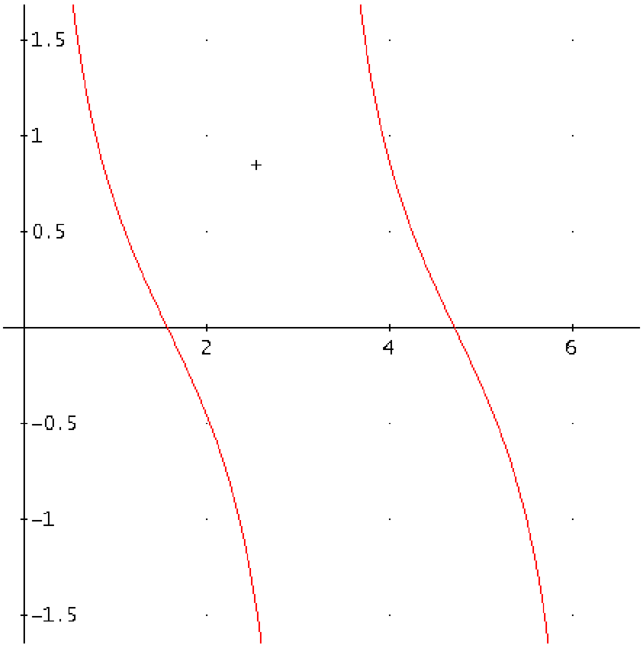


GRAFICO DI $y = \cot x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$y = \cot x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞



RELAZIONI GONIOMETRICHE

ESPRESSIONI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE PER MEZZO DI UNA DI ESSE

Da \ ***Si ha***	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$
$\tan\alpha$	$\dfrac{\tan\alpha}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\tan\alpha$	$\dfrac{1}{\tan\alpha}$
$\cot\alpha$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\dfrac{\cot\alpha}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\cot\alpha}$	$\cot\alpha$

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI OPPOSTI

Due archi si dicono ***opposti*** se sono uguali in valore assoluto ma di segno contrario.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI ESPLEMENTARI

Due archi si dicono ***esplementari*** se la loro somma è un angolo giro.

$$\sin(360°-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(360°-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(360°-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(360°-\alpha)=-\cot\alpha$$

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI SUPPLEMENTARI

Due archi si dicono ***supplementari*** se la loro somma è un angolo piatto.

$$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(180°-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(180°-\alpha)=-\cot\alpha$$

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI CHE DIFFERISCONO DI 180°

Due archi differiscono di 180° se uno è α e l'altro è $180°+\alpha$.

$$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(180°+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cot(180°+\alpha)=\cot\alpha$$

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI CHE DIFFERISCONO DI 90°

Due archi differiscono di 180° se uno è α e l'altro è $90°+\alpha$.

$$\sin(90°+\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(90°+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\tan(90°+\alpha)=-\cot\alpha$$
$$\cot(90°+\alpha)=-\tan\alpha$$

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI COMPLEMENTARI

Due archi si dicono ***complementari*** se la loro somma è un angolo retto.

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\tan(90° - \alpha) = \cot\alpha$$
$$\cot(90° - \alpha) = \tan\alpha$$

FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Servono a calcolare le funzioni circolari di angoli che si possono pensare come differenza o come somma di archi notevoli.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

FORMULE DI DUPLICAZIONE

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

FORMULE DI BISEZIONE

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$
$$\cot\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

FORMULE DI PROSTAFERESI

Servono a trasformare in prodotto la differenza e la somma di seni e coseni.

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

FORMULE DI WERNER

Servono a trasformare il prodotto di seni, di coseni e di un seno e di un coseno nella somma o nella differenza:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

EQUAZIONI GONIOMETRICHE

Definizione: Le ***equazioni goniometriche*** sono delle equazioni del tipo:

$$f(x)=0$$

con $f(x)$ funzione goniometrica.

EQUAZIONI IN SENO

Sono equazioni del tipo $\sin x = a$ e ammettono le soluzioni:

$$x=\alpha+2k\pi \qquad\qquad x=(\pi-\alpha)+2k\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Esempio: Risolvere l'equazione $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Il più piccolo angolo positivo il cui seno è $\frac{\sqrt{2}}{2}$ è $\frac{\pi}{4}$ e quindi si ha:

- $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$
- $x=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{3}{4}\pi+2k\pi$

EQUAZIONI IN COSENO

Sono equazioni del tipo $\cos x = a$ e ammettono le soluzioni:

$$x=\pm\alpha+2k\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Esempio: Risolvere l'equazione $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Il più piccolo angolo positivo il cui coseno è $\frac{\sqrt{3}}{2}$ è $\frac{\pi}{6}$ e quindi si ha:

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

EQUAZIONI IN TANGENTE

Sono equazioni del tipo $\tan x = a$ e ammettono le soluzioni:

$$x = \alpha + k\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Esempio: Risolvere l'equazione $\tan x = 1$

Il più piccolo angolo positivo la cui tangente è 1 è $\frac{\pi}{4}$ e quindi si ha:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

EQUAZIONI IN COTANGENTE

Sono equazioni del tipo $\cot x = a$ e ammettono le soluzioni:

$$x = \alpha + k\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Esempio: Risolvere l'equazione $\cot x = \sqrt{3}$

Il più piccolo angolo positivo la cui tangente è $\sqrt{3}$ è $\frac{\pi}{6}$ e quindi si ha:

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

EQUAZIONI RICONDUCIBILI AD EQUAZIONI ELEMENTARI

Esempio: Risolvere l'equazione $\sin 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

L'uguaglianza si realizza nei casi seguenti:

- $2x = x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \rightarrow \ x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$
- $2x = \pi - x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \rightarrow \ 3x = 3\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \rightarrow \ x = \frac{\pi}{4} + 2k\frac{\pi}{3}$

EQUAZIONI LINEARI IN SENO E COSENO

Definizione: Si dice ***equazione lineare in seno e coseno*** un'equazione del tipo:

$$a\sin x + b\cos x = c$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Per risolvere tali equazioni esistono diversi modi, uno di questi è quello di utilizzare le seguenti formule parametriche che esprimono le funzioni goniometriche di un angolo in funzione della tangente dell'angolo metà.

FORMULE PARAMETRICHE

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

Esempio: Risolvere l'equazione $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$.

Utilizzando le formule parametriche, in cui si pone $t = \tan\frac{x}{2}$, otteniamo:

$$\frac{2t}{1+t^2} + \sqrt{3}\frac{1-t^2}{1+t^2} = 2 \;\rightarrow\; 2t + \sqrt{3} - \sqrt{3}t^2 = 2 + 2t^2 \;\rightarrow\; \left(2+\sqrt{3}\right)t^2 - 2t + 2 - \sqrt{3} = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 1 - 4 + 3 = 0 \;\rightarrow\; t = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} \;\rightarrow\; \tan\frac{x}{2} = 2 - \sqrt{3} \;\rightarrow\; \frac{x}{2} = \frac{\pi}{12} + k\pi \;\rightarrow\; x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

EQUAZIONI OMOGENEE IN SENO E COSENO

Definizione: Si dice ***equazione omogenea in seno e coseno*** un'equazione del tipo:

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Per risolvere tali equazioni distinguiamo diversi casi.

I CASO: $a, b, c \neq 0$

È possibile supporre $\cos x \neq 0$, in quanto $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, per $a \neq 0$ non è soluzione dell'equazione.

Dividendo tutto per $\cos x$ otteniamo:

$$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$$

che è un'equazione facilmente risolubile.

Esempio: Risolvere l'equazione $\sin^2 x - \left(1+\sqrt{3}\right)\sin x\cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0$.

Dividiamo tutto per $\cos^2 x$ si ottiene:

$$\tan^2 x - \left(1+\sqrt{3}\right)\tan x + \sqrt{3} = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 1+3+2\sqrt{3}-4\sqrt{3} = 1+3-2\sqrt{3} = \left(1-\sqrt{3}\right)^2$$

$$\tan x = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\pm\left(1-\sqrt{3}\right)}{2} \quad \rightarrow \quad \tan x_1 = 1;\ \tan x_2 = \sqrt{3}$$

Da queste equazioni segue che:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{e} \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

II CASO: $a = 0 \wedge b, c \neq 0$ **OPPURE** $a, b \neq 0 \wedge c = 0$

In questo caso si hanno le due equazioni:

$$b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0 \qquad \text{oppure} \qquad a\sin^2 x + b\sin x\cos x = 0$$

che diventano:

$$\cos x\left(b\sin x + c\cos x\right) = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \sin x\left(a\sin x + b\cos x\right) = 0$$

In questo modo ci si riconduce a due equazioni: una elementare e una lineare in seno e coseno.

Esempio: Risolvere l'equazione $\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$.

Mettendo in evidenza $\cos x$ si ottiene:

$$\cos x\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right) = 0$$

ovvero:

- $\cos x = 0 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$;

- $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0 \;\rightarrow\; \sqrt{3}\tan x - 1 = 0 \;\rightarrow\; \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.

DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

Definizione: Le ***disequazioni goniometriche*** sono delle disequazioni del tipo:

$$f(x) > 0 \qquad f(x) < 0 \qquad f(x) \geq 0 \qquad f(x) \leq 0$$

con $f(x)$ funzione goniometrica.

DISEQUAZIONI ELEMENTARI

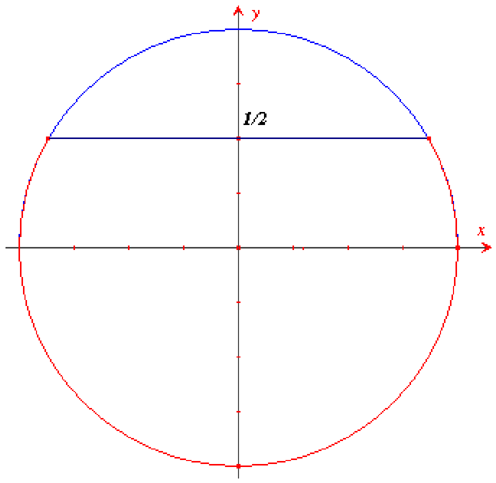
Sono delle disequazioni del tipo:

$$\sin x > a \qquad \cos x > b \qquad \tan x > c \qquad etc.$$

Esempio: Risolvere la disequazione $\sin x < \frac{1}{2}$.

Dalla rappresentazione riportata sotto è facile dedurre che deve essere:

$$2k\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi$$



DISEQUAZIONI RICONDUCIBILI AD EQUAZIONI ELEMENTARI

Sono equazioni del tipo:

$$\sin(ax+b)>c \qquad \textit{etc.}$$

Esempio: Risolvere la disequazione $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Con un ragionamento analogo a quello del precedente esempio si ottiene:

$$\frac{\pi}{4}+2k\pi<3x-\frac{\pi}{4}<\frac{3}{4}\pi+2k\pi \;\rightarrow\; \frac{\pi}{2}+2k\pi<3x<\pi+2k\pi \;\rightarrow\; \frac{\pi}{6}+2k\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}+2k\frac{\pi}{3}$$

DISEQUAZIONI LINEARI IN SENO E COSENO: $a\sin x+b\cos x+c>0$

Esempio: Risolvere la disequazione $\sqrt{3}\sin x+\cos x-\sqrt{3}>0$.

Basta utilizzare le formule parametriche per ottenere:

$$\frac{2\sqrt{3}t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}-\sqrt{3}>0 \;\rightarrow\; \left(\sqrt{3}+1\right)t^2-2\sqrt{3}t+\sqrt{3}-1<0$$

$$t=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3-\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}\pm1}{\sqrt{3}+1}=\begin{cases}t_1=1\\ t_2=2-\sqrt{3}\end{cases}$$

Essendo il verso della disequazione discorde con il coefficiente del termine di grado massimo, la disequazione è soddisfatta per tutti i valori dell'incognita interni all'intervallo delle radici, cioè:

$$2-\sqrt{3}<\tan\frac{x}{2}<1 \;\rightarrow\; \frac{\pi}{12}+k\pi<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{4}+k\pi \;\rightarrow\; \frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

DISEQUAZIONI OMOGENEE DI II GRADO IN SENO E COSENO: $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x>0$

Esempio: Risolvere la disequazione $\sqrt{3}\sin^2 x-3\sin x\cos x<0$.

Poiché per $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ la disequazione non è soddisfatta[1], dividendo tutto per $\cos^2 x$ si ottiene:

$$\sqrt{3}\tan^2 x-3\tan x<0$$

[1] Infatti $\sqrt{3}\cdot1-0>0$

da cui:

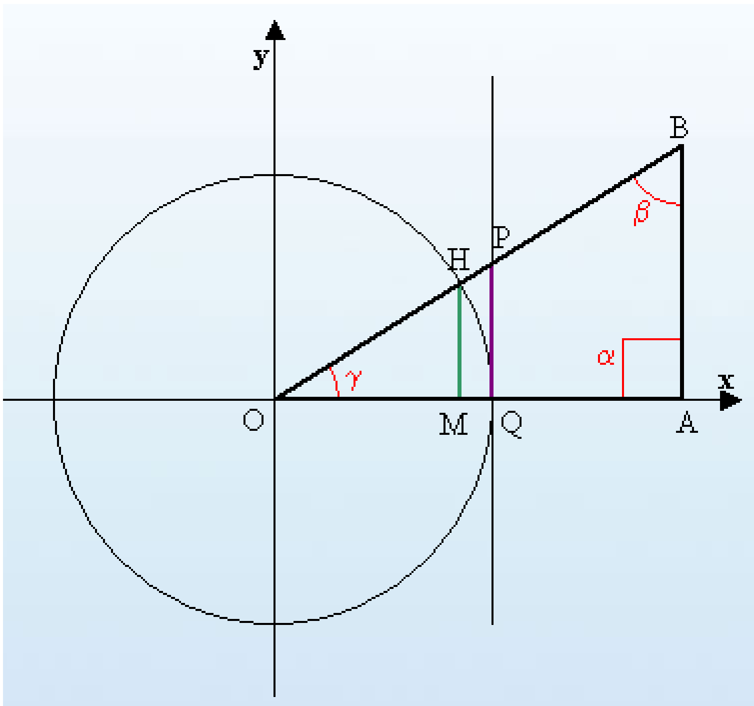
$$0 < \tan x < \sqrt{3}$$

Quindi le soluzioni sono:

$$k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi$$

TEOREMI SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

Consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy e una circonferenza goniometrica; sia inoltre PQ la tangente geometrica passante per il punto $Q(1;0)$ e parallela all'asse delle ordinate. Sia OAB un qualsiasi triangolo rettangolo avente uno dei vertici coincidente con l'origine del sistema di riferimento cartesiano e un cateto giacente sull'asse delle ascisse.



Si dimostra facilmente che i triangoli rettangoli AOB e OHM sono simili e, di conseguenza, i loro lati sono in proporzione, cioè:

$$\frac{OB}{OH} = \frac{OA}{OM} = \frac{BA}{HM}$$

Considerando i primi due membri di questa relazione e sostituendo in essa i valori, secondo la classica notazione dei triangoli rettangoli, si ha:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{\cos\gamma}$$

da cui:

$$b = a \cdot \cos\gamma$$

Considerando invece il primo e il terzo membro della stessa relazione e sostituendo in essa i valori, secondo la classica notazione dei triangoli rettangoli, si ottiene:

$$\frac{a}{1} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

da cui:

$$c = a \cdot \sin\gamma$$

In generale si ha il seguente:

Primo teorema dei triangoli rettangoli: *In un triangolo rettangolo un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo ad esso adiacente; ovvero un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo ad esso opposto.*

In riferimento alla precedente figura, si considerino i triangoli simili *OPQ* e *OPA*, si ha:

$$\frac{OA}{BA} = \frac{OQ}{PQ}$$

Sostituendo in tale relazione i valori, secondo la classica notazione dei triangoli rettangoli, si ha:

$$\frac{b}{c} = \frac{1}{\tan\gamma}$$

e quindi:

$$c = b \cdot \tan\gamma$$

Essendo $\beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, per le formule degli archi associati si avrà:

$$c = b \cdot \tan\gamma = b \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = b \cdot \cot\beta$$

In generale si ha il seguente:

Secondo teorema dei triangoli rettangoli: *In un triangolo rettangolo un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo ad esso opposto; ovvero un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la cotangente dell'angolo ad esso adiacente.*