

MATRICI E DETERMINANTI

di vincenzo scudero

1. DEFINIZIONI

Per **matrice** si intende una tabella di elementi ordinati per righe e per colonne. Di una matrice occorre specificare il numero di righe, di colonne e l'insieme a cui appartengono gli elementi. La matrice seguente è formata da 3 righe e 2 colonne di numeri reali, si dice allora che è una matrice 3x2 su \mathbf{R} (e si indica con $\mathbf{R}^{3,2}$)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -\frac{3}{5} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice si indica con una lettera maiuscola dell'alfabeto latino (A, B, X , etc.), l'elemento generico della matrice è indicato con la corrispondente lettera minuscola seguita da due indici che ne individuano la posizione all'interno della matrice, il primo indice rappresenta la riga, il secondo la colonna. Così nella matrice A sopra indicata $a_{12}=3$ e $a_{32}=-1$.

Una generica matrice A di m righe ed n colonne sarà indicata nel modo seguente:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Una matrice si dice **rettangolare** se il numero m di righe differisce dal numero n di colonne ($m \neq n$)
- Una matrice si dice **quadrata** se il numero di righe è uguale al numero di colonne, ovvero se $m=n$; in tal caso la matrice si dice di ordine n .
- In una matrice si chiama **linea** indifferentemente una riga o una colonna e con **linee parallele** si intendono due o più righe, o colonne.
- Una linea si dice **identicamente nulla** se tali sono tutti i suoi elementi.
- In una matrice quadrata si definisce **diagonale principale** la diagonale che contiene tutti gli elementi con indici uguali ($a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$). La seconda diagonale, quella contenente gli elementi ($a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$) si chiama **diagonale secondaria**.
- Una matrice *quadrata* si dice **identica**, indicata con **I**, se gli elementi della diagonale principale sono pari a 1 e tutti gli altri elementi sono nulli.
- Una matrice *quadrata* si dice **simmetrica** se rimane uguale scambiando le righe con le colonne.
- Una matrice *quadrata* si dice **matrice diagonale** se tutti gli elementi che non stanno sulla diagonale principale sono nulli, ovvero se $a_{ij}=0$ per $i \neq j$.
- Una matrice diagonale avente tutti gli elementi della diagonale principali uguale a 1 si dice **matrice identica**.
- Ad ogni matrice se ne può associare un'altra, indicata con A^T , ottenuta scambiando le righe con le colonne. Tale matrice è detta **trasposta**.

Risulta evidente che una matrice è simmetrica se coincide con la sua trasposta

2. OPERAZIONI CON LE MATRICI

SOMMA DI DUE MATRICI

Siano A e B due matrici rettangolari $m \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Si definisce somma delle due matrici date la matrice C avente per elementi la somma degli elementi corrispondenti delle due matrici:

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

PRODOTTO DI UN NUMERO REALE PER UNA MATRICE

Il prodotto di un numero reale k per una matrice A è una matrice avente per elementi il prodotto di k per ciascun elemento di A :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad k \in \mathbb{R} \quad B = k \cdot A = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix} \quad b_{ij} = ka_{ij}$$

PRODOTTO RIGA PER COLONNA

Il prodotto riga per colonna di due matrici A e B di ordine rispettivamente $m \times n$ ed $n \times p$ è una matrice C di ordine $m \times p$ avente per elemento c_{ij} la somma dei prodotti degli elementi della i -esima riga di A per i corrispondenti elementi della j -esima colonna di B :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

Per poter effettuare il prodotto riga per colonna tra due matrici è **assolutamente necessario** che il numero di colonne della prima matrice sia uguale al numero di righe della seconda matrice. Per tale motivo il prodotto riga per colonna tra due matrici è **commutativo** se e solo se le matrici sono entrambe **quadrato** e dello **stesso ordine**.

Esempio

Determinare la matrice prodotto riga per colonna di

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$$

La matrice C sarà una matrice di ordine 2×4 (due righe e quattro colonne), gli emlementi saranno:

$$c_{11} = 7 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-1)(-5) = 7 + 5 = 12 \quad c_{21} = (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3(-5) = -2 + 4 - 15 = -13$$

$$c_{12} = 7 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 = -7 - 2 = -9 \quad c_{22} = (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 2 + 6 = 8$$

$$c_{13} = 7 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = 21 - 1 = 20 \quad c_{14} = (-2) \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = -6 - 2 + 3 = -5$$

$$c_{14} = 7 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 = 7 \quad c_{14} = (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = -2 + 4 = 2$$

$$C = \begin{bmatrix} 12 & -9 & 20 & 7 \\ -13 & 8 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

3. DETERMINANTI

DETERMINANTE DI UNA MATRICE QUADRATA DI SECONDO ORDINE

Considerata una matrice quadrata di secondo ordine

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

si chiama **determinante del secondo ordine** il numero

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

PROPRIETÀ

Per i determinanti valgono le seguenti proprietà:

1. Un determinante non cambia, se si scambiano ordinatamente le righe con le colonne;
2. Il determinante è nullo se sono nulli tutti gli elementi di una linea;
3. Il determinante è nullo se due linee parallele sono proporzionali (e quindi anche uguali);
4. Se si scambiano due linee tra loro il determinante cambia di segno;
5. Se si moltiplicano gli elementi di una linea per un numero k , il determinante resta moltiplicato per k ;
6. Ad una linea se ne può aggiungere un'altra, anche moltiplicata per un numero k , senza alterare il determinante.

Tali proprietà sono valide anche per i determinanti di matrici quadrate di ordine superiore al secondo.

DETERMINANTE DI UNA MATRICE ORDINE QUALSIASI

Sia A una matrice quadrata di ordine 3. Si definisce **complemento algebrico dell'elemento a_{ij}** e si indica con A_{ij} il determinante di secondo ordine che si ricava dalla matrice A privata della i -esima riga e della j -esima colonna, con segno cambiato se la somma di i e j è dispari

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Se si fissa una riga o una colonna si possono calcolare i tre complementi algebrici dei tre elementi della linea considerata. Si definisce **determinante** della matrice A la somma algebrica dei prodotti di ciascun elemento della linea fissata per il proprio complemento algebrico. Fissata la riga i , il determinante della matrice A sarà:

$$\det A = \sum_{j=1}^3 a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + a_{i3} A_{i3}$$

esempio

sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, e fissiamo la prima riga. Il determinante si calcola sommando algebricamente gli elementi della prima riga per i

rispettivi complementi algebrici; il termine relativo alla posizione riga=1 e colonna=2 avrà segno negativo:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 5 - 3 \cdot 2 = -5 - 6 = -11$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = - [(-2) \cdot 5 - 3 \cdot 1] = - [-10 - 3] = - (-13) = 13$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = -4 + 1 = -3$$

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1 \cdot (-11) + 3 \cdot 13 + 4 \cdot (-3) = -11 + 39 - 12 = 16$$

Si può generalizzare il procedimento descritto per una matrice di ordine 3 ad una matrice qualsiasi di ordine n : il complemento algebrico dell'elemento a_{ij} sarà il determinante di ordine $n-1$ ricavato dalla matrice originaria privata della i -esima riga e della j -esima colonna. Per

calcolare un determinante di ordine n bisognerà quindi calcolare n determinanti di ordine $n-1$, e cioè $n(n-1)$ determinanti di ordine $n-2$, etc..., fino ad arrivare a $\frac{n!}{2}$ determinanti di secondo ordine.

REGOLA DI SARRUS PER I DETERMINANTI DI TERZO ORDINE

Per calcolare il determinante di una matrice di ordine 3 è possibile ricorrere alla seguente regola (di Sarrus):
data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

si ricopiano le prime due colonne di seguito alla terza,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

si calcolano i tre prodotti segnati dalle linee diagonali

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

e gli altri tre prodotti segnati dalle seguenti linee diagonali

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

il determinante della matrice è pari alla somma di questi sei prodotti, i primi tre col proprio segno, i secondi tre con il segno cambiato.

Esempio

Ricalcoliamo, con il metodo di Sarrus, il determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = [1 \cdot (-1) \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) \cdot 2] - [3 \cdot (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) \cdot 1] = -5 + 9 - 16 - (-30 + 6 - 4) = -5 + 9 - 16 + 30 - 6 + 4 = 16$$

4. RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI - METODO DI CRAMER

Descriviamo brevemente, omettendo le dimostrazioni, il metodo di risoluzione di sistemi lineari di Cramer considerando inizialmente un sistema lineare di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Consideriamo la matrice A (detta dei *coefficienti*, o matrice *incompleta*) di secondo ordine formata dai coefficienti della prima equazione (prima riga) e dai coefficienti della seconda equazione (seconda riga),

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Notiamo che in tale matrice la prima colonna è formata dai coefficienti di x delle due equazioni e la seconda colonna dai coefficienti di y .

Calcolato il determinante di A , si ha:

$$\begin{aligned} \det A = 0 &\Rightarrow \text{il sistema non è risolvibile (impossibile o indeterminato)} \\ \det A \neq 0 &\Rightarrow \text{il sistema è determinato} \end{aligned}$$

Se il determinante, quindi, non è nullo è possibile risolvere il sistema. Il procedimento per pervenire alla soluzione è il seguente:

Si considera una nuova matrice X ricavata dalla matrice A sostituendo al posto della prima colonna (relativa all'incognita x) la colonna dei termini noti e se ne calcola il determinante:

$$X = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix} \quad \det X = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - a_{12} b_2$$

Analogamente si costruisce la matrice Y sostituendo la seconda colonna con la colonna dei termini noti, e se ne calcola il determinante:

$$Y = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix} \quad \det Y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}$$

La soluzione del sistema dato è la seguente:

$$\bar{x} = \frac{\det X}{\det A} \quad \bar{y} = \frac{\det Y}{\det A}$$

Esempio

Sia dato il sistema

$$\begin{cases} 6x - y = 4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \det A = 18 + 2 = 20 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{il sistema è risolvibile}$$

$$X = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \det X = 12 + 1 = 13$$

$$Y = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \det Y = 6 - 8 = -2$$

La soluzione è, pertanto:

$$x = \frac{\det X}{\det A} = \frac{13}{20} \quad y = \frac{\det Y}{\det A} = \frac{-2}{20} = -\frac{1}{10}$$

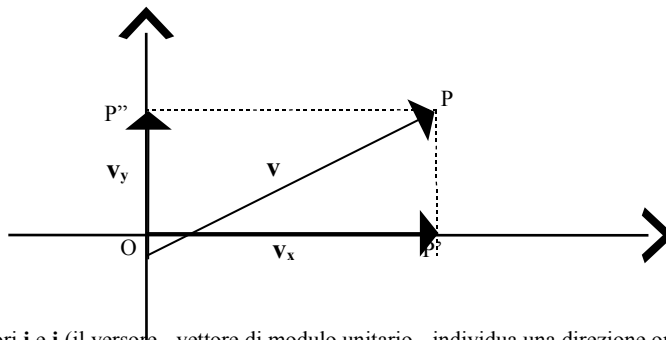
Analogo procedimento per un sistema lineare di terzo ordine: individuata la matrice A dei coefficienti delle incognite x, y e z , se il determinante di A è diverso da zero si calcolano i determinanti delle matrici X, Y e Z formate, rispettivamente, sostituendo la prima, la seconda e la terza colonna di A con la colonna dei termini noti. La soluzione del sistema è data da:

$$x = \frac{\det X}{\det A} \quad y = \frac{\det Y}{\det A} \quad z = \frac{\det Z}{\det A}$$

Chiaramente il metodo di Cramer può essere utilizzato per qualunque sistema lineare di n equazioni in n incognite.

5. VETTORI

Un vettore \mathbf{v} del piano può essere rappresentato mediante i suoi componenti v_x e v_y , una volta stabilito un sistema di riferimento cartesiano. I vettori **componenti** sono i due vettori (unicamente determinati) secondo le due direzioni assegnate (nel riferimento cartesiano gli assi x e y) la cui somma è \mathbf{v} .



Assegnati i versori \mathbf{i} e \mathbf{j} (il versore - vettore di modulo unitario - individua una direzione orientata) è possibile riscrivere i componenti di \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_x &= v_x \mathbf{i} & \text{con } v_x &= \overline{OP'} \\ \mathbf{v}_y &= v_y \mathbf{j} & \text{con } v_y &= \overline{OP''} \end{aligned}$$

e quindi

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$$

I numeri reali v_x e v_y si dicono **le componenti** del vettore \mathbf{v} .

Le considerazioni precedenti ci permettono di identificare un vettore del piano con una coppia ordinata (v_x, v_y) di numeri reali.

Se $\mathbf{v}(v_x, v_y)$ e $\mathbf{w}(w_x, w_y)$ sono due vettori del piano, il vettore somma avrà per componenti la somma delle componenti dei due vettori $(v_x + w_x, v_y + w_y)$.

Se k è un numero reale, il vettore $k\mathbf{v}$ prodotto tra lo scalare k e il vettore $\mathbf{v}(v_x, v_y)$ ha per componenti (kv_x, kv_y) .

Estendendo i risultati precedenti, se una coppia ordinata (x, y) di numeri reali individua un vettore del piano, una terna ordinata (x, y, z) di numeri reali rappresenta un vettore nello spazio, una quadrupla ordinata individua un vettore dello spazio a quattro dimensioni (spazio non certo immaginabile!), e, più in generale, una n -pla (*ennupla*) di numeri reali rappresenta un vettore nello spazio a n dimensioni (che si indica con \mathbf{R}^n).

Esempi

L'insieme di numeri reali $(3, -2, 1, 0, 6)$ rappresenta un vettore di \mathbf{R}^5 .

I due vettori di \mathbf{R}^6 $\mathbf{v}(4, -1, -1, 3, 2, 0)$ e $\mathbf{w}(-2, 3, 5, -7, 0, 1)$ sommati danno il vettore $\mathbf{z}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$ che ha come componenti $(2, 2, 4, -4, 2, 1)$.

L'insieme \mathbf{R}^n dei vettori n -dimensionali, nel quale sono definite le operazioni di somma e di moltiplicazione per uno scalare viene detto **spazio vettoriale** (secondo la definizione di spazio che viene dato in *algebra*)

L'indice $n \in \mathbf{N}$ è detta **dimensione** dello spazio vettoriale \mathbf{R}^n .

DIPENDENZA E INDIPENDENZA LINEARE

Dati m vettori di \mathbf{R}^n $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_m$ i numeri reali $k_1, k_2, k_3, \dots, k_m$, si dice **combinazione lineare** di tali vettori secondo gli scalari dati il vettore di \mathbf{R}^n :

$$\mathbf{v} = k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + k_3 \mathbf{v}_3 + \dots + k_m \mathbf{v}_m$$

se $k_1, k_2, k_3, \dots, k_m$ sono tutti nulli, il vettore \mathbf{v} è il vettore nullo $\mathbf{O}(0,0,0,\dots,0)$, ma è possibile ottenere il vettore nullo anche con una combinazione lineare dei vettori assegnati con numeri reali non tutti nulli:

dati i vettori $\mathbf{v}_1(2, -6, -4)$ e $\mathbf{v}_2(-3, 9, 6)$ e i numeri reali $k_1=3$ e $k_2=2$ otteniamo come combinazione lineare

$$3 \cdot (2, -6, -4) + 2 \cdot (-3, 9, 6) = (6, -18, -12) + (-6, 18, 12) = (6-6, -18+18, -12+12) = (0, 0, 0)$$

Vi sono dei vettori, tuttavia, per cui è impossibile ottenere il vettore nullo utilizzando scalari diversi da zero. Per tali vettori si dà la seguente definizione:

Gli m vettori di \mathbf{R}^n $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_m$ si dicono **linearmente indipendenti (l.i.)** se e solo se la loro combinazione lineare è il vettore nullo soltanto con scalari tutti nulli.

Se ciò non accade i vettori si dicono **linearmente dipendenti (l.d.)**.

Esempio

Siano $\mathbf{v}_1(2, 5)$ e $\mathbf{v}_2(4, -3)$ due vettori di \mathbf{R}^2 . Considerati a e b numeri reali una loro combinazione lineare sarà espressa da

$$\mathbf{v} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = a(2, 5) + b(4, -3) = (2a+4b, 5a-3b)$$

affinché il vettore \mathbf{v} possa essere il vettore nullo deve essere contemporaneamente $2a+4b=0$ e $5a-3b=0$, ovvero

$$\begin{cases} 2a + 4b = 0 \\ 5a - 3b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2b \\ -13b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} * \\ b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

cioè \mathbf{v} è il vettore nullo se e solo se a e b sono entrambi nulli, quindi i due vettori sono l.i.

Se il numero dei vettori supera la dimensione dello spazio cui appartengono (es. tre vettori di \mathbf{R}^2 , sette vettori di \mathbf{R}^5 , etc.) allora i vettori sono sicuramente l.d.

Se consideriamo in \mathbf{R}^2 i versori direzionali $\mathbf{i}(1, 0)$ e $\mathbf{j}(0, 1)$, è facile vedere che tali vettori sono l.i.. Ne segue che qualunque vettore del piano può essere considerato una combinazione lineare dei vettori \mathbf{i} e \mathbf{j} .

$$\text{Es. } \mathbf{v}(3, -2) \Rightarrow (3, -2) = (3+0, 0-2) = (3, 0) + (0, -2) = 3(1, 0) - 2(0, 1) \Rightarrow 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$$

Si dice, in questo caso, che i vettori unitari \mathbf{i} e \mathbf{j} formano una **base** di \mathbf{R}^2 . Più in generale la n-pla dei vettori di \mathbf{R}^n $\mathbf{b}_1(1,0,\dots,0)$, $\mathbf{b}_2(0,1,0,\dots,0)$, $\mathbf{b}_3(0,0,1,\dots,0)$, ..., $\mathbf{b}_n(0,0,0,\dots,1)$ formano una base di \mathbf{R}^n .

$$\text{Es. } \mathbf{v} \in \mathbf{R}^5, \mathbf{v}(5, -2, 0, 1, -3) = 5\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2 + 0\mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4 - 3\mathbf{b}_5$$