Equazioni di primo grado

Si dicono equazioni le uguaglianze tra due espressioni algebriche che sono verificate solo per particolari valori di alcune lettere, dette incognite.

In altre parole, un'uguaglianza può diventare vera sostituendo alla lettera (incognita) un determinato valore. Ad esempio, se scrivo:
$3x - 6 = 0$
e al posto di x sostituisco il valore 2 l'uguaglianza diventa vera:
$3 \cdot 2 - 6 = 0$
$6 - 6 = 0$
$0 = 0$
mentre se sostituisco altri numeri non è vera. Si dice allora che $x=2$ è la **soluzione** (o radice) dell'equazione.
Due equazioni di dicono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni.

Notiamo che l'equazione è la traduzione in linguaggio algebrico dell'enunciato di un problema. Ad esempio l'equazione:
$3x - 4 = x + 6$
esprime il problema: *Trovare un numero tale che il suo triplo diminuito di 4 sia uguale al numero stesso aumentato di 6.*

Primo principio di equivalenza

Il primo principio di equivalenza delle equazioni dice che:
Aggiungendo o sottraendo ad entrambi i membri di un'equazione una stessa quantità l'equazione resta equivalente a quella data.

esempio:
$3x - 6 = 0$
aggiungo +6 da entrambe le parti (potrei aggiungere o togliere qualunque numero ma io aggiungo il numero che rende l'equazione più semplice, col segno cambiato così scompare al secondo membro), e ottengo:
$3x -6 + 6 = 0 + 6$
$3x = 6$

Il primo principio di equivalenza si può esprimere anche nel seguente modo: ***in un'equazione posso trasportare qualsiasi termine da un membro all'altro, a condizione di cambiarlo di segno.***

Attenzione: *"l'equazione resta equivalente a quella data"* non significa che l'equazione resta la stessa, ma significa che ha la stessa soluzione. Infatti:
3x - 6 = 0 significa : *togliendo 6 dal triplo di un numero ottengo 0,* mentre 3x = 6 significa: *il triplo di un numero vale 6*. Le due equazioni sono diverse come sono diverse le due frasi, ma entrambe le equazioni hanno la stessa soluzione (in questo caso 2).

Secondo principio di equivalenza

Il secondo principio di equivalenza delle equazioni dice che:
Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di un'equazione per una stessa quantità <u>diversa da zero</u> l'equazione resta equivalente a quella data.

esempio:
3x = 6

divido da entrambe le parti per 3 (potrei dividere per qualunque numero che non fosse zero ma io divido per il numero che c'è davanti alla x per lasciare la x da sola e così risolvere l'equazione)
3x/3 = 6/3

semplifico:
x = 2
è la soluzione.

Il secondo principio sarà utilissimo da usare quando avremo delle equazioni con denominatori numerici. Infatti dopo aver fatto il minimo comune multiplo fra entrambi i membri potrò eliminare i denominatori (equivale a moltiplicare entrambi i membri dell'equazione per il minimo comune multiplo).

Soluzione di un'equazione di primo grado ad una incognita

Ci occuperemo per ora delle equazioni di primo grado con una sola incognita. In esse la x compare con potenze non superiori alla prima (se in alcuni passaggi compaiono potenze superiori della x, queste poi finiranno per sparire mediante opportune semplificazioni).
Un'equazione di primo grado nell'incognita x si dice ridotta in **forma normale** se è del tipo:

$$a \cdot x = b$$

con a e b costanti e $a \neq 0$.

Lavoriamo su un esempio. Ho l'equazione:

$2x - 4 = 8$

che traduce in linguaggio matematico la frase "*Sottraendo 4 dal doppio di un numero ottengo 8*". Per risolverla devo trasformarla in qualcosa del tipo:

x = soluzione

quindi devo lasciare la x da sola prima dell'uguale, cioè devo eliminare tutti i termini che sono vicini alla x. Il primo termine che eliminerò sarà -4 perché quello meno legato alla x e per farlo userò il primo principio di equivalenza. Aggiungo da entrambe le parti +4 per eliminare il -4, che equivale a trasportare il -4 dall'altra parte cambiandolo di segno:

$2x - 4 + 4= 8 + 4$
$2x = 12$ equazione in forma normale

Ora devo eliminare il 2 e per farlo devo dividere per 2 sia prima che dopo l'uguale (secondo principio di equivalenza):

$2x/2 = 12/2$

semplifico:

$x = 6$ è la soluzione

Come hai visto risolvere un'equazione è un'operazione piuttosto meccanica: basta applicare prima il primo principio poi il secondo principio di equivalenza. Tipicamente, <u>le difficoltà nella risoluzione di un'equazione di primo grado ad una incognita stanno tutte nei passaggi algebrici necessari per arrivare a scrivere l'equazione stessa in forma normale</u> (riduzione a denominatore comune, uso dei principi di equivalenza, operazioni tra monomi e/o polinomi etc.).

E' possibile vedere se hai risolto giustamente un'equazione: infatti per definizione un' equazione è un'uguaglianza verificata se al posto di x metto la soluzione, quindi posso fare la verifica sostituendo nell'equazione di partenza il valore 6 al posto di x:

Verifica

$2x - 4 = 8$
$2 \cdot 6 -4 = 8$
$12 - 4 = 8$
$8 = 8$
L'uguaglianza è vera quindi ho risolto giustamente l'equazione.
La verifica delle equazioni di solito si fa solo per equazioni semplici e non per quelle

troppo complicate, altrimenti si aggiungerebbe un esercizio di calcolo di un'espressione al calcolo di un'equazione. Comunque vedremo che la verifica sarà importante per alcune categorie di equazioni quali le letterali e le fratte.

Equazione possibile, impossibile ed indeterminata

Come in tutti i linguaggi, anche nel linguaggio della matematica posso dire frasi vere, posso dire bugie e posso dire cose inutili: le equazioni, infatti, possono essere **possibili**, **impossibile ed indeterminata.** Tranne che nei casi più semplici, in generale non è facile dire se un'equazione è possibile, impossibile o indeterminata senza risolverla. Infatti, a seconda del tipo di soluzione, avrò:

- **x = numero** Equazione possibile
- **0 = numero** Equazione impossibile
- **0 = 0** Equazione indeterminata

Equazione possibile
E' l'equazione vera, che afferma cioè un fatto vero ed unico, ed ha **una e una sola** soluzione. Esempio: *sommando 4 ad un numero ottengo il triplo del numero stesso*.

Se traduco il problema in equazione ottengo:
x + 4 = 3x
e risolvendo
x - 3x = -4
-2x = -4
x = 2
Quando otteniamo la soluzione del tipo x = numero diciamo che l'equazione è possibile

Equazione impossibile
E' l'equazione che afferma un fatto falso. Esempio: *sommando 3 ad un numero ottengo lo stesso numero.*

Pensandoci sopra, non posso trovare nessun numero che resti uguale a se stesso aggiungendovi 3, quindi la mia affermazione è impossibile. Se lo traduco in equazione ottengo:
x + 3 = x
e risolvendo
x - x = -3
0 = -3
quando otteniamo zero uguale a un numero diciamo che l'equazione è impossibile.

Equazione indeterminata
E' l'equazione che afferma un fatto vero ma che va bene per infiniti numeri (qualche testo la chiama anche identità). Esempio: *sommando 5 ad un numero ottengo lo stesso numero aumentato di 5.*

E' un fatto vero ma che non mi individua il numero perché è vero per qualunque numero.
Se lo traduco in equazione ottengo:
$x + 5 = x + 5$
e risolvendo
$x - x = 5 - 5$
$0 = 0$
Quando otteniamo zero uguale a zero diciamo che l'equazione è indeterminata (oppure che è un'identità).

Equazioni letterali

Un'equazione si dice **letterale** quando oltre ai numeri ed alle incognite vi compaiono anche delle lettere (o parametri).

(Va fatta subito una convenzione:
useremo le ultime lettere minuscole dell'alfabeto per indicare le incognite: x y z t u v w ...
useremo invece le prime lettere per indicare dei parametri, cioè dei simboli che possono essere sostituiti da numeri: a b c d e f g ...)

Quando risolviamo un'equazione letterale occorre ricordare che la lettera occupa il posto di numeri e che per risolvere un'equazione devo tener presente che il secondo principio mi vieta di dividere per zero; quindi al posto della lettera non potrò sostituire quei numeri che mi rendono il denominatore zero, d'altra parte io devo trovare tutte le soluzioni di un'equazione. Vediamolo meglio su un semplice esempio:

Sia da risolvere l'equazione: $\mathbf{a\,x = 3}$. Per risolverla dovrei applicare il secondo principio, ma esso è applicabile solo se $a \neq 0$. Allora distinguo i due casi:

- $a \neq 0$ posso applicare il secondo principio quindi:
  $a\,x / a = 3 / a$
  e semplificando:
  $x = 3 / a$

- $a = 0$ non posso applicare il secondo principio, ma sostituendo ad a il suo valore l'equazione mi diventa:
  $0 \cdot x = 3$
  $0 = 3$ equazione impossibile

raccogliendo i risultati:

- se a $\neq 0$ => $x = 3/a$
- se a = 0 => equazione impossibile

Riassumendo: per risolvere un'equazione letterale occorre porre diversi da zero i termini che applicando il secondo principio compariranno al denominatore. Inoltre bisognerà discutere l'equazione quando quei termini avranno valore uguale a zero (devi sostituire tale valore al posto delle lettere). L'equazione che ne verrà fuori sarà o impossibile o indeterminata.

Equazioni fratte

Un'equazione si dice **fratta** quando la x compare sotto il segno di frazione.
Al solito, tenendo conto del secondo principio, quando farò il m. c. m. dovrò dire che l'equazione non è valida per il valore della x che annulla il minimo comune multiplo. Questa si chiama anche **Condizione di Realtà** (abbreviata in C.R.). Dopo aver risolto l'equazione dovrò controllare il valore della x:

1. se il valore della x non è quello che annullava il minimo comune multiplo la soluzione è accettabile
2. se il valore trovato è uguale a quello che annullava il minimo comune multiplo allora dovrò dire che la soluzione non è accettabile

Vediamo un esempio per tipo:

1) $$\frac{1}{2}=\frac{1}{(x-2)}$$

m.c.m. = $2(x-2) \neq 0$ cioè : Condizione di Realtà (C.R.) $x \neq 2$

$$\frac{(x-2)}{[2(x-2)]}=\frac{2}{[2(x-2)]}$$

per il secondo principio tolgo i denominatori (posso farlo perché ho supposto il m.c.m. diverso da zero)
$x - 2 = 2$
$x = 4$ accettabile

2) $$\frac{1}{2}-\frac{1}{(x-2)}=\frac{-1}{(x-2)}$$

m.c.m. = $2(x-2) \neq 0$ cioè C. R. $x \neq 2$

$$\frac{[(x-2)-2]}{[2(x-2)]}=\frac{-2}{[2(x-2)]}$$

per il secondo principio tolgo i denominatori (posso farlo perché ho supposto il m.c.m. diverso da zero)

$x - 2 - 2 = -2$
$x = 2$ non accettabile perché contraria alla condizione di realtà

Equazioni ai moduli

In Matematica esistono delle grandezze che sono rappresentabili solamente da numeri positivi, ad esempio si pensi alla lunghezza di un segmento o alla distanza fra due punti: non ha nessun significato associare a tali grandezze un numero negativo. Allora, in certe parti della matematica, avremo bisogno di un qualcosa che ci garantisca che il numero che consideriamo è sempre positivo: questo qualcosa è l'etichetta "Modulo" (o valore assoluto) che verrà indicata con il simbolo

$$| x |$$

e si leggerà:

modulo di x

Definizione di modulo
Dobbiamo definire che un qualcosa è sempre positivo, quindi se è positivo va bene, mentre se è negativo dovrò cambiargli il segno per farlo diventare positivo.
Si definisce modulo di x e si scrive $| x |$

- lo stesso x se x e' positivo
- x cambiato di segno se x è negativo

In simboli:

- $| x | = x$ se $x \geq 0$
- $| x | = -x$ se $x < 0$

Equazioni con un modulo
Sono come le equazioni normali: l'unica differenza è che spezzando il modulo nelle sue componenti otteniamo due equazioni che valgono in due intervalli diversi. Un esempio chiarirà meglio il concetto. Risolvere l'equazione:

$|2x - 4| + x = 8$
pongo l'argomento del modulo maggiore o uguale a zero

$2x - 4 \geq 0$
$2x \geq 4$
$x \geq 2$

Ottengo l'intervallo $[2, +\infty)$, in questo intervallo il termine dentro il modulo è positivo quindi tolgo il modulo e considero l'equazione
$2x - 4 + x = 8$
Invece nell'intervallo $(-\infty, 2)$ il termine dentro il modulo $(2x - 4)$ è negativo quindi per togliere il modulo devo cambiarlo di segno $(-2x + 4)$ e considerare l'equazione
$-2x + 4 + x = 8$
raccogliendo:

- se $x < 2$ considero
  $-2x + 4 + x = 8$

- se $x \geq 2$ considero
  $2x - 4 + x = 8$

Naturalmente la soluzione è accettabile solo se cade dentro l'intervallo in cui considero l'equazione. Posso prendere per buona la soluzione della prima solo se è minore di 2 e posso accettare la soluzione della seconda solo se è uguale o maggiore di 2.
In pratica devo risolvere le due equazioni nel loro intervallo

- risolviamo la prima
  se $x < 2$ considero
  $-2x + 4 + x = 8$
  $-x + 4 = 8$
  $-x = 4$
  $x = -4$ essendo questo valore minore di 2 posso accettarlo

- risolviamo la seconda
  se $x \geq 2$ considero
  $2x - 4 + x = 8$
  $3x - 4 = 8$
  $3x = 12$
  $x = 4$ essendo questo valore maggiore di 2 posso accettarlo

Ho due soluzioni: $x_1 = -4$ e $x_2 = 4$

Concludendo: quando ho un modulo devo suddividere l'equazione in più equazioni, ognuna valida in un certo intervallo, e devo risolvere ogni equazione singolarmente: potrò accettare la soluzione solo se cade dentro l'intervallo dell'equazione.
Per il numero di soluzioni non c'è un criterio: possono essere 1, 2, oppure nessuna. Ad esempio prova a risolvere la stessa equazione cambiando di segno il termine dopo l'uguale:
$|2x - 4| + x = -8$ (nessuna soluzione)