FUNZIONI ESPONENZIALE E LOGARITMICA

Le potenze con esponente reale

La potenza a^x di un numero reale *a* è definita

se *a>0* per ogni $x \in \Re$

se *a=0* per tutti e soli i numeri reali positivi ($x \in \mathbb{R}^+$)

se *a<0* per tutti e soi i numeri relativi ($x \in \mathbb{Z}$)

in particolare

se a=1, $1^x = 1, \forall x \in \Re$

se a=0, $a^0 = 1, \forall a \in \Re^+$

se x=0, $0^x = 0, \forall x \in \Re^+$

se x>0, $a^{-x} = (\frac{1}{a})^x = \frac{1}{a^x}$

Potenze reali con base positiva (a>0)

Il valore di una potenza reale con base positiva è sempre positivo, $a > 0 \Rightarrow a^x > 0, \forall x \in \Re$

Proprietà delle potenze con esponente reale

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$a^x : a^y = a^{x-y}$

$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

$a^x : b^x = (a : b)^x$

La funzione esponenziale

Si chiama esponenziale ogni funzione del tipo

$$y = a^x , \quad con \quad a > 0 \quad fissato$$

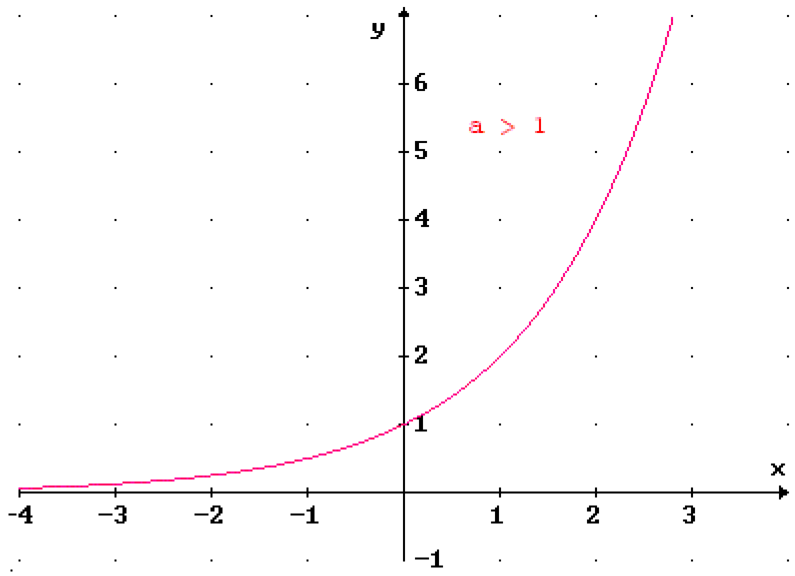
Il **dominio** della funzione, cioè i valori che si possono attribuire a *x,* è tutto $\Re$

il **codomino**, cioè i valori che la funzione assume, è $\Re^+$

Per ogni valore della base *a* si ha una diversa funzione esponenziale, gli andamenti delle funzioni differiscono in base al valore di a. Si hanno tre casi:

Primo caso, a>1

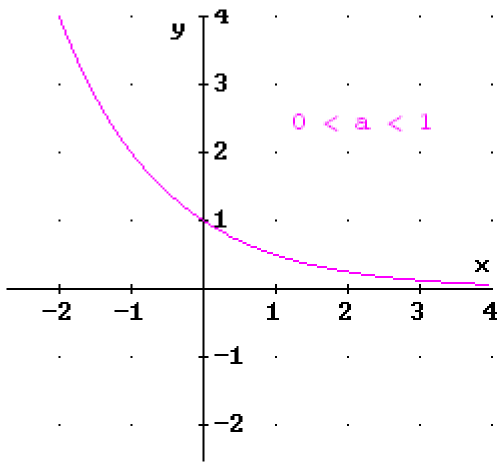
In questo caso la funzione risulta monotona crescente assumendo valori positivi sempre maggiori man mano cha cresce il valore di *x*. Per $x \to -\infty$ la funzione tende a 0 (estremo inferiore), per $x \to +\infty$ anche la funzione tende a $+\infty$ (estremo superiore). Il grafico di una funzione esponenziale $y = a^x$ con a>1 è del tipo



Particolare importanza in matematica assume la funzioe $y = e^x$, con *e*= 2,71828 … numero di Nepero.

Secondo caso, 0<a<1

In questo caso la funzione risulta monotona decrescente assumendo valori positivi sempre più piccoli man mano cha cresce il valore di *x*. Per $x \to -\infty$ la funzione tende a $+\infty$ (estremo superiore), per $x \to +\infty$ la funzione tende a 0 (estremo inferiore). Il grafico di una funzione esponenziale $y = a^x$ con 0<a<1 è del tipo



<u>*Terzo caso, a=1*</u>

In questo caso la funzione assume la forma $y=1^x=1$, cioè è la retta parallela all'asse *x* di equazione y=1. Essendo il caso banale non viene trattato.

Riepilogando

La funzione esponenziale $y=a^x$, con a>1 :

1. ha per dominio tutta la retta reale $\Re$
2. è sempre positiva
3. è monotona crescente
4. non ha asintoti verticali
5. ha per asintoto orizzontale sinistro l'asse *x*, $\lim_{x\to-\infty} a^x=0$
6. non ha asintoti a destra, $\lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty$
7. interseca l'asse *y* nel punto (0,1) essendo $a^0=1\,\forall\, a>0$
8. ha derivata prima positiva in tutto il dominio (funzione crescente)
9. ha derivata seconda positiva in tutto il dominio (concavità verso l'alto)

La funzione esponenziale $y=a^x$, con 0<a<1 :

1. ha per dominio tutta la retta reale $\Re$
2. è sempre positiva
3. è monotona decrescente
4. non ha asintoti verticali

5. ha per asintoto orizzontale destro l'asse *x*, $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$
6. non ha asintoti a sinistra, $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$
7. interseca l'asse *y* nel punto (0,1) essendo $a^0 = 1 \, \forall a > 0$
8. ha derivata prima negativa in tutto il dominio (funzione decrescente)
9. ha derivata seconda positiva in tutto il dominio (concavità verso l'alto)

I LOGARITMI

Il logaritmo è una delle due operazioni inverse della potenza a^x . Se fissiamo la bas *a* possiamo calcolare il valore $b = a^x$ per ogni $x \in \Re$. Ad esempio la potenza 2^x è pari a 8 se *x*=3 in quanto $2^3 = 8$. Fissando la base 2 possimao dire che 3 è la potenza da assegnare alla base 2 per ottenere il numero 8. Ovvero: dato il numero 8, quale valore dobbiamo assegnare alla *x* affinchè $2^x = 8$? Ovviamente 3. Diremo allora che 3 è il logaritmo di 8 in base 2.

In effetti se pensiamo al numero 7 potremmo chiederci: “quale valore dobbiamo assegnare alla *x* affinchè $2^x = 7$? Sappiamo che tale valore esiste in quanto la funzione $y = 2^x$ assume tutti i valori positivi e sappiamo anche che questo numero è compreso tra 2 e 3. In effetti è un numero decimale illimitato e non periodico con parte intera pari a 2.

Questo numero, non altrimenti esprimibile, lo chiameremo logaritmo di 7 in base 2 e lo indicheremo con il simbolo $\log_2 7$. Esso è l'esponente che dobbiamo assegnare alla base 2 per ottenere 7.

In generale

definizione

Dati due numeri reali positivi *a* e *b*, con $a \neq 1$, si chiama logaritmo in base *a* di *b* l'esponente *x* che bisogna assegnare alla base *a* per ottenere il numero *b*.

$$x = \log_a b \iff a^x = b$$

Esempi

$\log_2 16 = 4$

$\log_{10} 1000 = 3$

$\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$, infatti $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$

$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2$

$\log_e 1 = 0$, infatti $e^0 = 1$

Esistono due logaritmi particolari, il logaritmo **decimale** con base 10 e il logaritmo **naturale** con base *e*= 2,71828 … numero di Nepero. Per distinguerli si utilizza la seguente simbologia (usata anche nelle calcolatrici scientifiche)

$\log_{10} b = lgb$

$\log_e b = lnb$

Proprietà dei logaritmi

1. Il logaritmo di 1 è sempre uguale a zero

   $\log_a 1 = 0 \quad \forall a > 0, a \neq 1$

2. Il logaritmo della base è sempre uguale a 1

   $\log_a a = 1$

3. il logaritmo di un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi

   $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

4. il logaritmo di un rapporto è uguale alla differenza dei logaritmi

   $\log_a (\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$

5. il logaritmo di una potenza è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo

   $\log_a (b)^n = n \cdot \log_a b$

6. il logaritmo di una radice ennesima è uguale al rapporto tra il logaritmo e l'indice di radice

   $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$

7. Cambio di base

   $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Esempi

$ln12 = \ln(2^2 \cdot 3) = ln2^2 + ln3 = 2 \cdot ln2 + ln3$

$\log_2 \frac{32}{\sqrt{5}} = \log_2 32 - \log_2 \sqrt{5} = \log_2 2^5 - \frac{1}{2} \log_2 5 = 5\log_2 2 - \frac{1}{2} \log_2 5 = 5 - \frac{1}{2} \log_2 5$

Eempio di semplice disequazione logaritmica

$$\log_3(x-3)>2$$
$$\log_3(x-3)>2\cdot\log_3 3 \quad (essendo\ 1=\log_3 3)$$
$$\log_3(x-3)>\log_3 3^2$$
$$\log_3(x-3)>\log_3 9$$
$$x-3>9 \quad con\ x-3>0 \Rightarrow x>3 \quad (condizione\ di\ esistenza\ del\ logaritmo)$$
$$x>3+9$$
$$x>12 \quad (soluzione)$$

Grafici delle funzioni logaritmiche

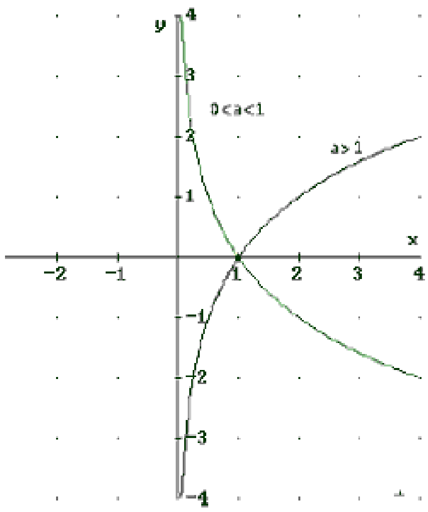
Primo caso, a>1

In questo caso la funzione, definita nella semiretta $]0;+\infty[$, risulta monotona crescente assumendo valori sempre maggiori man mano cha cresce il valore di *x*. Per $x\to 0^+$ la funzione tende a $-\infty$ (estremo inferiore), per $x\to+\infty$ anche la funzione tende a $+\infty$ (estremo superiore).

Secondo caso, 0<a<1

In questo caso la funzione, definita nella semiretta $]0;+\infty[$, risulta monotona decrescente assumendo valori sempre minori man mano cha cresce il valore di *x*. Per $x\to 0^+$ la funzione tende a $+\infty$ (estremo superiore), per $x\to+\infty$ la funzione tende a $-\infty$ (estremo inferiore).

I grafici delle funzioni logaritmiche $y=\log_a x$ con $a>1$ e con $0<a<1$ sono del tipo



Riepilogando

La funzione logaritmica $y=\log_a x$, con a>1 :

1. ha per dominio la semiretta $]0;+\infty[$
2. è positiva per $x>1$ e negativa per $x<1$
3. è monotona crescente
4. ha per asintoto verticale l'asse delle x, $\lim_{x\to 0^+} \log_a x=-\infty$
5. non ha asintoto orizzontale né obliquo, $\lim_{x\to +\infty} \log_a x=+\infty$
6. non interseca l'asse *y*
7. interseca l'asse *x* nel punto (1,0) essendo $\log_a 1=0\ \forall a>0, a\neq 1$
8. ha derivata prima positiva in tutto il dominio (funzione crescente)
9. ha derivata seconda negativa in tutto il dominio (concavità verso il basso)

La funzione logaritmica $y=\log_a x$, con 0<a<1 :

1. ha per dominio la semiretta $]0;+\infty[$
2. è positiva per $x<1$ e negativa per $x>1$
3. è monotona decrescente
4. ha per asintoto verticale l'asse delle x, $\lim_{x\to 0^+} \log_a x=+\infty$
5. non ha asintoto orizzontale né obliquo, $\lim_{x\to +\infty} \log_a x=+\infty$
6. non interseca l'asse *y*
7. interseca l'asse *x* nel punto (1,0) essendo $\log_a 1=0\ \forall a>0, a\neq 1$
8. ha derivata prima negativa in tutto il dominio (funzione decrescente)
9. ha derivata seconda positiva in tutto il dominio (concavità verso l'alto)