FUNZIONE CONTINUA IN UN PUNTO

Una funzione reale $f(x): I \to \Re$ si dice **continua** nel punto $x_0 \in I$ se il limite della funzione al tendere di *x* verso x_0 è uguale al valore che la funzione assume in x_0.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

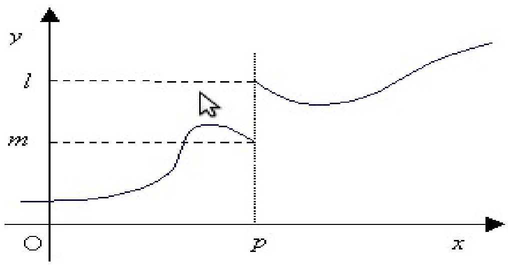
Ciò comporta tre condizioni:

1. $\exists f(x_0)$ la funzione deve essere definita in x_0;
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \Re$ il limite della funzione, al tendere di *x* verso x_0 deve esistere finito;
3. $f(x_0) = l$ i due valori devono coincidere.

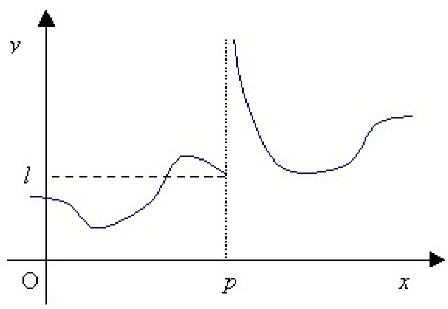
Se almeno una delle condizioni non è verificata il punto x_0 si dice **punto di discontinuità**

Esistono tre tipi di punti di discontinuità

1. **Punto di discontinuità di prima specie**
   Si ha quando il limite destro e il limite sinistro della funzione, per $x \to x_0$, sono entrambi finiti ma distinti tra loro. In tal caso la differenza tra i due valori si chiama salto della funzione.



2. **Punto di discontinuità di seconda specie**
   Si ha quando almeno uno dei due limiti, destro o sinistro, della funzione, per $x \to x_0$, è infinito oppure non esiste.
   Se il punto x_0 è un punto di discontinuità di seconda specie in quanto uno dei due limiti è infinito, allora la retta $x = x_0$ è un asintoto verticale.

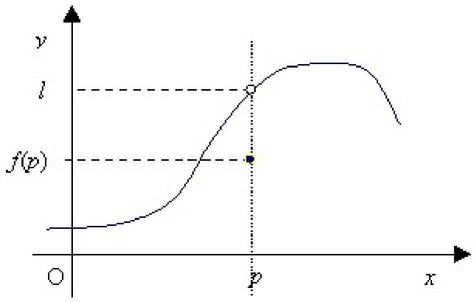


3. **Punto di discontinuità di terza specie o eliminabile**

   Si ha quando il $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \Re$, ossia esiste ed è finito il limite della funzione per $x \to x_0$ e la funzione o non è definita in x_0 o risulta distinto dal valore del limite ($f(x_0) \neq l$).

   In tal caso la discontinuità si può eliminare modificando la funzione in maniera tale che il valore in x_0 sia uguale al valore del limite

$$y = \begin{Bmatrix} f(x)\ per\ x \neq x_0 \\ l\ per\ x = x_0 \end{Bmatrix}$$



TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

Teorema di Weierstrass

Se f è una funzione continua definita in un intervallo chiuso e limitato [a ; b], allora essa assume, in tale intervallo, il massimo assoluto e il minino assoluto.

Hp $f(x):[a;b] \to \Re$

$f(x)\, continua\, \text{in}[a;b]$

Ts $\exists c, d \in [a;b]: f(c) = M, f(d) = m$ M=max, m=min

Teorema di Bolzano (dei valori intermedi)

Se f è una funzione continua definita in un intervallo chiuso e limitato [a ; b], allora essa assume, almeno una volta, tutti i valori compresi tra il massimo e il minino.

Hp $f(x):[a;b] \to \Re$

$f(x)\, continua\, \text{in}[a;b]$

Ts $\forall y: m \leq y \leq M\, \exists x \in [a;b]: y = f(x)$

Teorema dell'esistenza degli zeri

Se f è una funzione continua definita in un intervallo chiuso e limitato [a ; b] e negli estremi di tale intervallo assume valori di segno opposto, allora esiste almeno un punto c, interno all'intervallo, in cui f si annulla.

Hp	$f(x):[a;b]\rightarrow\Re$ $f(x)\, continua\, \mathrm{in}[a;b]$ $f(a)\cdot f(b)<0$	$\Rightarrow$	Ts $\exists c\in]a;b[: f(c)=0$