ESERCIZI SVOLTI
Ricerca del dominio di funzioni razionali fratte e irrazionali

v.scudero *www.vincenzoscudero.it*

novembre 2009

1 Funzioni algebriche fratte

1.1 Esercizio svolto

Determinare il dominio della funzione

$$y = \frac{x-1}{x^2 - 11x + 10}$$

(generalizzazione) La funzione è del tipo

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

con $f(x)$ e $g(x)$ polinomi reali in x. Per determinare il dominio D della funzione bisogna porre

(regola)

$$g(x) \neq 0$$

In questo caso sarà quindi

$$x^2 - 11x + 10 \neq 0 \tag{1}$$

Risolviamo quindi l'*inequazione* (1) [1]
Calcoliamo prima il discriminante Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 121 - 40 = 81$$

per cui

$$x_{1,2} \neq \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{11 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{11 \pm 9}{2}$$

Le soluzioni dell'inequazione (1) sono

$$x_1 \neq \frac{11-9}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

e

$$x_2 \neq \frac{11+9}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

In conclusione la funzione data è definita per tutti i valori della x ad esclusione dei valori $\{1; 10\}$

$$D = \mathbb{R} \smallsetminus \{1; 10\}$$

[1] una *inequazione* si risolve come un'equazione

1.2 Esercizio svolto

Determinare il dominio della funzione

$$y = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + x + 1}$$

Riduciamo ad un'unica frazione:

$$y = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{x\left(x^2 + x + 1\right)} = \frac{x + 1}{x\left(x^2 + x + 1\right)}$$

La funzione si presenta, quindi, nella forma

$$y = \frac{x + 1}{x\left(x^2 + x + 1\right)} \tag{2}$$

Per determinare il dominio D della funzione (2) bisogna porre il denominatore diverso da zero e studiare l'*inequazione* che ne deriva. Essendo, in questo caso, il denominatore *fattorizzato* bisognerrà porre diverso da zero ciascun fattore:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 + x + 1 \neq 0 \end{cases} \tag{3}$$

La prima inequazione della (3) è già risolta, la seconda, avendo il discriminante Δ negativo, è verificata per ogni valore della x, infatti:

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

per cui, essendo l'equazione $x^2 + x + 1 = 0$ impossibile (nel campo dei numeri reali) l'inequazione risulta, invece, sempre verificata

$$S : \forall x \in \mathbb{R}$$

In definitiva il dominio D della funzione data è

$$D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

1.3 Esercizio svolto

Determinare il dominio della funzione

$$y = \frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2 - 10x + 8}$$

Anche in questo caso bisogna porre il denominatore diverso da zero

$$x^3 + x^2 - 10x + 8 \neq 0$$

Utlizzando la *regola di Ruffini* è possibile scomporre il polinomio di terzo grado nel prodotto dei due fattori

$$x^3 + x^2 - 10x + 8 = (x - 1)\left(x^2 + 2x - 8\right)$$

(Il secondo fattore potrebbe essere scomposto ancora con il metodo di Ruffini*)*
Il dominio D della funzione si determina ponendo

$$\begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ x^2 + 2x - 8 \neq 0 \end{cases}$$

La prima inequazione dà come risultato

$$x \neq 1 \tag{4}$$

Risolviamo l'inequazione $x^2 + 2x - 8 \neq 0$ utilizzando la formula ridotta

$$\frac{\Delta}{4} = 1 + 8 = 9$$

$$x_{1,2} \neq -1 \pm 3$$

da cui

$$x_1 \neq -4 \tag{5}$$

$$x_1 \neq 2 \tag{6}$$

La soluzione formata dalle (4), (5) e (6) fornisce anche il dominio della funzione:

$$D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -4 \vee x \neq 1 \vee x \neq 2\}$$

$$D = \mathbb{R} \smallsetminus \{-4, 1, 2\}$$

2 Funzioni irrazionali

2.1 Esercizio svolto

Determinare il dominio della funzione

$$y = \sqrt{x^2 - 1}$$

(generalizzazione) La funzione è del tipo

$$y = \sqrt{f(x)}$$

Per determinare il dominio della funzione è necessario studiare la disequazione

(regola)

$$g(x) \geq 0$$

La soluzione di tale disequazione fornisce il dominio della funzione data

Nel nostro caso bisogna studiare la disequazione

$$x^2 - 1 \geq 0 \tag{7}$$

E' una disequazione di *secondo grado* la cui equazione associata è **pura**. Risolviamo l'equazione associata:

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

da cui si ottengono le **due soluzioni opposte**

$$x = -1$$

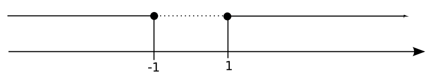
$$x = 1$$

Avendo trovato **due** soluzioni **distinte** il Δ associato è positivo per cui la soluzione della disequazione (7) è data dall'insieme degli *intervalli esterni* rispetto alle due soluzioni ottenute

$$x \leq x_1 \vee x \geq x_2$$

Nel nostro caso

$$x \leq -1 \vee x \geq 1$$



per cui il dominio della funzione assegnata è

$$D = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -1 \vee x \geq 1\}$$

$$D = (-\infty; -1] \cup [1 : +\infty)$$

2.2 Esercizio svolto

Determinare il dominio della funzione

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 4x}{1 - x^2}}$$

Anche in questo caso, trattandosi di una funzione irrazionale, dovremo porre il radicando maggiore o uguale a zero e studiare la disequazione:

$$\frac{x^2 - 4x}{1 - x^2} \geq 0 \tag{8}$$

si tratta di una *disequazione fratta* da studiare ponendo maggiore o uguale a zero il numeratore (N) e maggiore a zero il denominatore (D) per poi studiare il prodotto dei segni:

$$N \geq 0; \qquad x^2 - 4x \geq 0; \qquad x\,(x - 4) \geq 0$$

da cui

$$N_1 \geq 0; \qquad x \geq 0$$

$$N_2 \geq 0; \qquad x - 4 \geq 0; \qquad x \geq 4$$

Studiamo il segno del denominatore:

$$D > 0; \qquad 1 - x^2 > 0; \qquad x^2 - 1 < 0$$

Dall'equazione associata ricaviamo le due soluzione (vedi esercizio precedente) $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$, ma essendo questa volta il verso della disequazione discorde rispetto al coefficiente di x^2 si avrà:

$$-1 < x < 1$$

Ricapitolando

$$N_1 \geq 0; \qquad x \geq 0$$

$$N_2 \geq 0; \qquad x - 4 \geq 0; \qquad x \geq 4$$

$$D > 0; \qquad -1 < x < 1$$

Non essendoci soluzioni di molteplicità *pari* [2] si avrà alternanza di segni negli intervalli individuati dalle soluzioni stesse, ed assumendo la frazione valore *negativo* per $x = -2$, valore minore della soluzione più piccola, si avrà la seguente alternanza dei segni negli intervalli individuati dalle soluzioni:

$$\text{la frazione} \quad \frac{x^2 - 4x}{1 - x^2} \quad \text{assume segno} \quad \begin{cases} - & \text{se } x \in \,]-\infty; -1[\\ + & \text{se } x \in \,]-1; 0[\\ - & \text{se } x \in \,]0; 1[\\ + & \text{se } x \in \,]1; 4[\\ - & \text{se } x \in \,]4; +\infty[\end{cases}$$

[2] ovvero nessun numero compare un numero pari di volte come soluzione

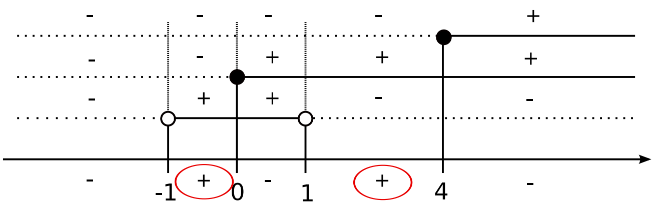
Confrontando i segni degli intervalli con il verso della disequazione (8) si può concludere che il dominio della funzione è:

$$D = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x \leq 0 \vee 1 < x \leq 4\}$$

$$D =]-1; 0] \cup]1 : 4]$$

essendo $x = 0$ e $x = 4$ inclusi in quanto soluzioni del numeratore.

Verifichiamo graficamente



2.3 Esercizio svolto

Determinare il dominio della funzione

$$y = \frac{x^3 + 3x - 5}{\sqrt{4x^2 - x - \frac{1}{2}}}$$

In questo caso bisognerebbe porre

$$\begin{cases} \sqrt{4x^2 - x - \frac{1}{2}} \neq 0 \\ \\ 4x^2 - x - \frac{1}{2} 4x^2 - x - \frac{1}{2} \geq 0 \end{cases}$$

La prima condizione si ha per $4x^2 - x - \frac{1}{2} \neq 0$ per cui, confrontandola con la seconda condizione si ottiene, in definitiva, la sola condizione:

$$4x^2 - x - \frac{1}{2} > 0 \tag{9}$$

(generalizzazione) Questa situazione si verifica per ogni funzione del tipo

$$y = \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}$$

(regola) in tal caso è possibile porre

$$g(x) > 0$$

Risolviamo la (9)

$$\Delta = 1 + 4(4)(\frac{1}{2}) = 1 + 8 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{8}$$

Le soluzioni dell'equazione associata alla (9) sono

$$x_1 = \frac{1-3}{8} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

e

$$x_2 = \frac{1+3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

per cui la disequazione (9) ha per soluzione tutte le x appartenti agli intervalli esterni rispetto a tali soluzioni. Pertanto il dominio della funzione assegnata è

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} | x < -\frac{1}{4} \vee x > \frac{1}{2} \right\}$$

$$D = \left] -\infty ; -\frac{1}{4} \right[\cup \left] \frac{1}{2} : +\infty \right[$$

3 Funzioni varie

3.1 Esercizio svolto

Determinare il dominio della funzione

$$y = \sqrt{x+2} + \sqrt{1-x}$$

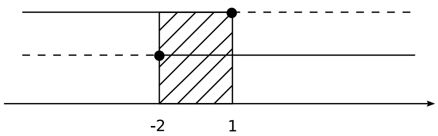
La funzione è somma di due funzioni irrazionali per cui bisogna porre a sistema le condizioni di esistenza delle due radici

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases}$$

da cui si ha:

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

Dal grafico del sistema



ricaviamo il dominio della funzione

$$D = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq 1\}$$

$$D = [-2; 1]$$

3.2 Esercizio svolto

Determinare il dominio della funzione

$$y = \frac{\sqrt{x^2-3}}{x-5} + \sqrt{-x^2+x+30}$$

In questo caso abbiamo due radici e un termine frazionario. Le tre condizioni vanno messe a sistema:

$$\begin{cases} x^2-3 \geq 0 \\ x-5 \neq 0 \\ x^2-x-30 \leq 0 \end{cases} \tag{10}$$

Per la seconda radice abbiamo cambiato il segno di tutti i termini e il verso della disequazione. Risolviamo la prima disequazione della (10). Consideriamo l'equazione associata:

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 3$$

da cui si ottengono le **due soluzioni opposte**

$$x = -\sqrt{3}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq 1\}$$

$$D = [-2; 1]$$

$$x = \sqrt{3}$$

Avendo trovato **due** soluzioni **distinte** il Δ associato è positivo per cui la soluzione della disequazione (10) è data dall'insieme degli *intervalli esterni* rispetto alle due soluzioni ottenute

$$x \leq -\sqrt{3} \vee x \geq \sqrt{3} \tag{11}$$

L'inequazione $x - 5 \neq 0$ ha soluzione

$$x \neq 5 \tag{12}$$

L'ultima disequazione è di secondo grado *completa* :

$$\Delta = 1 + 120 = 121$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{1 \pm 11}{2}$$

Le soluzioni dell'equazione associata sono:

$$x_1 = \frac{1-11}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

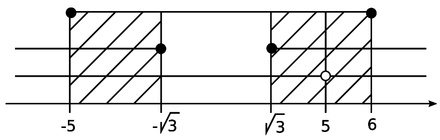
e

$$x_2 = \frac{1+11}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

La soluzione della disequazione $x^2 - x - 30 \leq 0$ sarà dunque:

$$-5 \lneq x \leq 6 \tag{13}$$

Riportiamo la (10), la 12 e la (13) sul grafico del sistema:



da cui ricaviamo il dominio:

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} | -5 \leq x \leq -\sqrt{3} \vee \sqrt{3} \leq x \leq 6 \vee x \neq 5\right\}$$

$$D = \left[-5; -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}; 5\, [\cup]\, 5; 6\right]$$

3.3 Esercizio svolto

Determinare il dominio della funzione

$$y = \sqrt{\frac{x^2+2x}{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Impostiamo il sistema ponendo il primo radicando maggiore o uguale a zero e il secondo radicando maggiore di zero (cfr. esercizio 2.3)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{x-1} \geq 0 & (A) \\ n \\ x^2-1>0 & (B) \end{cases}$$

Risolviamo prima la disequazione fratta (A):
studiamo il numeratore

$$N \geq 0; \qquad x^2+2x \geq 0; \qquad x\,(x+2) \geq 0$$

da cui

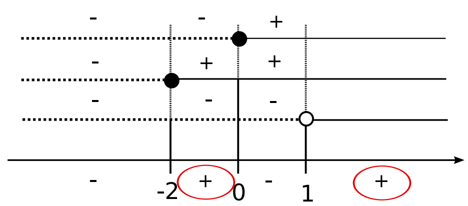
$$N_1 \geq 0; \qquad x \geq 0$$

$$nN_2 \geq 0; \qquad x+2 \geq 0; \qquad x \geq -2$$

Studiamo il denominatore

$$D > 0; \qquad x-1>0; \qquad x>1$$

Ponendo i tre risultati sul grafico



otteniamo la soluzione della disequazione (A)

$$-2 \leq x \leq 0 \vee x > 1 \tag{14}$$

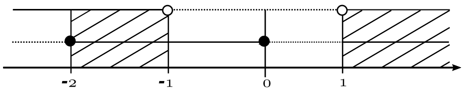
Studiamo adesso la disequazione (B)

$$x^2-1>0$$

la cui soluzione è (cfr. esercizio 2.1

$$x < 1 \vee x > 1 \tag{15}$$

Ponendo le soluzioni (14) e (15) sul grafico del sistema



otteniamo il dominio della funzione data:

$$D = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x < -1 \vee x > 1\}$$

$$D = [-2; -1[\cup]1 : +\infty[$$

4 Esercizi proposti

Determinare il dominio delle seguenti funzioni

1. $y = \dfrac{x^2 + x^3}{x - 7}$
2. $y = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 6x - 7}$
3. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x\left(x^2 - 4\right)}$
4. $y = \dfrac{1}{x^5 - 4x^4}$
5. $y = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 5}$
6. $y = \dfrac{x + 3}{x^3 - 8x - 19x - 12}$

7. $y = \sqrt{\dfrac{x - 3}{x + 4}}$
8. $y = \dfrac{\sqrt{2x^2 - 7x - 22}}{4}$
9. $y = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$
10. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 8}{x^2 - 4}}$
11. $y = \dfrac{x^2 - 3x - 3}{\sqrt{16 - x^2 - 6x}}$

12. $y = \sqrt{x^2 - x - 12} - \sqrt{2x - x^2}$
13. $y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x^2 - 4}} + \dfrac{1}{x - 2}$
14. $y = \dfrac{3}{\sqrt{x^2 - 3}} - \sqrt{\dfrac{x^2 - 3}{3}}$
15. $y = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{3 - x^2}$
16. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 1} + \dfrac{\sqrt{x - 1}}{x}$

5 Soluzioni

Soluzioni degli esercizi proposti

1. $x \neq 7$
2. $x \neq -7 \vee x \neq 1$
3. $x \neq -2 \vee x \neq 0 \vee x \neq 2$
4. $x \neq 0 \vee x \neq 4$
5. $x \neq -\sqrt{5} \vee x \neq \sqrt{5}$
6. $x \neq 1 \vee x \neq 3 \vee x \neq 4$

7. $x < -4 \vee x \geq 3$
8. $x < -4 \vee x \geq \dfrac{11}{2}$
9. $x \leq -2\sqrt{2} \vee -2 < x < 2 \vee x \geq 2\sqrt{2}$
10. $x \leq -1 \vee x > 0$
11. $-8 \leq x \leq 2$

12. $\emptyset$ [*nessuna soluzione*]
13. $-2 < x \leq 1 \vee x > 2$
14. $x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$
15. $-\sqrt{3} \leq x \leq -\sqrt{2} \vee \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3}$
16. $x > 1$