Sistemi di equazioni

Definizione
Un sistema è un insieme di equazioni che devono essere verificate contemporaneamente, cioè devono avere contemporaneamente le stesse soluzioni.
Definiamo grado di un sistema il prodotto dei gradi delle equazioni che lo costituiscono:
Esempio

$$\begin{cases} x^3+x\,y=4 \\ x^2+x\,y+4\,y^2=5 \end{cases}$$

è un sistema di sesto grado (il polinomio che è associato alla prima equazione ha grado 3 e quello associato alla seconda ha grado 2) .
Per adesso vedremo solo il tipo di sistemi più semplici: quelli di due equazioni di primo grado in due incognite.

Sistemi di equazioni di primo grado
Considereremo, dunque, sistemi di due equazioni di primo grado nelle due incognite *x* e *y*. Risolvere un sistema di questo tipo, allora, significa trovare, tra le infinite soluzioni delle due equazioni prese singolarmente, una soluzione (cioè una coppia di valori *x* e *y)* che le soddisfa entrambe. Questa si dirà **soluzione del sistema**.
Per primo, bisogna ridurre il sistema in **forma normale**, mediante gli opportuni passaggi algebrici, cioè mettere i termini con la *x* e con la *y* prima dell'uguale ed i termini noti dopo l'uguale. In questo modo, il sistema si presenta nella forma:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a\,x+b\,y=c} \\ \boldsymbol{a'\,x+b'\,y=c'} \end{cases}$$

Come nel caso delle equazioni, un sistema di equazioni può essere possibile, impossibile o indeterminato a seconda dell'esistenza o meno di una o più soluzioni.

Sistema possibile
Il sistema è possibile se le sue equazioni sono compatibili, nel senso che non si contraddicono né si ripetono. In questo caso, esiste una ed una sola soluzione, cioè una ed una sola coppia di valori (*x, y*) che soddisfa entrambe le equazioni.

Esempio:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$$

la somma di due numeri è 3 e la loro differenza è 1. Con un po' di logica dico che i numeri sono 2 e 1: infatti 2 + 1 = 3 e 2 - 1 = 1 e le due equazioni sono compatibili. Il risultato è:

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Più in generale un sistema del tipo:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

è possibile se vale la seguente relazione tra i coefficienti della x e della y:

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$

Sistema impossibile

Il sistema è impossibile se le sue equazioni si contraddicono fra di loro e, dunque, tra le infinite soluzioni della prima e della seconda equazione non ve ne è nessuna in comune, che soddisfa, cioè, entrambe le equazioni.

Esempio:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x+y=1 \end{cases}$$

la somma di due numeri è 3 e la loro somma è 1. Non è possibile che due numeri sommati valgano una volta 3 ed una volta 1, quindi tutto il sistema è impossibile. Se si risolve il sistema con uno qualsiasi dei metodi che vedremo successivamente, si ottiene un'equazione impossibile del tipo 0 = numero.

Più in generale, un sistema del tipo:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

è impossibile se vale la relazione:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

Sistema indeterminato

Il sistema è indeterminato se le sue equazioni dicono entrambe la stessa cosa, cioè le due equazioni del sistema sono equivalenti (hanno lo stesso insieme infinito di soluzioni).

Esempio:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$$

la somma di due numeri è 3 e la somma del doppio dei due numeri è 6; le due equazioni dicono la stessa cosa, cioè forniscono la stessa informazione sulla coppia (x,y). Se si risolve il sistema si trova un'equazione indeterminata del tipo 0=0 .

In generale, un sistema del tipo:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

è indeterminato se vale:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

<u>Riassumendo:</u>

Dato un sistema di due equazioni lineari in due incognite del tipo:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

si può dire, anche senza risolverlo, se è possibile, impossibile od indeterminato, osservandone i coefficienti:

- ➔ $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ sistema **possibile** (o determinato) => esiste una ed una sola soluzione
- ➔ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ sistema **impossibile** => non esiste alcuna soluzione del sistema
- ➔ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ sistema **indeterminato** => esistono infinite soluzioni, quelle di ognuna delle equazioni prese singolarmente

Soluzione di un sistema di primo grado di due equazioni a due incognite

Nelle prossime pagine vedremo la soluzione di un sistema (sempre lo stesso) con i diversi metodi noti; i più semplici per due equazioni con due incognite sono il metodo di sostituzione ed il metodo di confronto. Il metodo di Cramer, invece, decisamente troppo complicato per sistemi di questo tipo, rappresenta, tuttavia, il metodo principale per risolvere sistemi di più equazioni a più incognite.

Risolvere il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 3x-y=7 \end{cases}$$

Metodo di sostituzione

In entrambe le equazioni la x e la y devono avere lo stesso valore, allora posso ricavare da una delle due equazioni il valore della x (o della y) e sostituirla alla x (o alla y) nell'altra equazione. In questo modo si ottiene un'equazione in una sola incognita che sappiamo risolvere. Sostituire x od y è indifferente e dipende dal sistema: nel nostro caso conviene ricavare la y dalla seconda equazione e sostituirla nella prima, in modo da non avere frazioni. Dunque, isolo la *y* nella seconda equazione:

$$\begin{cases} 2x+3y=12 \\ -y=7-3x \end{cases}$$

cambio di segno:

$$\begin{cases} 2x+3y=12 \\ y=-7+3x \end{cases}$$

sostituisco il valore della *y* nella prima equazione:

$$\begin{cases} 2x+3(-7+3x)=12 \\ y=-7+3x \end{cases}$$

eseguo i calcoli e trovo la soluzione nella prima equazione:

$$\begin{cases} x=3 \\ y=-7+3x \end{cases}$$

Nella seconda equazione al posto di *x* sostituisco il valore trovato:

$$\begin{cases} x=3 \\ y=-7+3\cdot 3 \end{cases}$$

e ottengo la coppia di valori che è soluzione del sistema:

$$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

<u>Riassumendo</u>, per risolvere un sistema col metodo di sostituzione:

- ricavo la variabile da una delle due equazioni (la più semplice) e la sostituisco nell'altra equazione
- questa diventa ad una sola incognita e la risolvo
- una volta trovata l'incognita la sostituisco nella prima equazione e trovo il valore dell'altra incognita

Metodo del confronto

Nel metodo di confronto ricavo da entrambe le equazioni la *x* poi metto a confronto i risultati.

Esempio:

$$\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 3x-y=7 \end{cases}$$

esplicito i termini con la *x*:

$$\begin{cases} 2x=12-3y \\ 3x=7+y \end{cases}$$

ricavo le *x*:

$$\begin{cases} x=\dfrac{12-3y}{2} \\ x=\dfrac{7+y}{3} \end{cases}$$

e poi uguaglio i risultati e risolvo l'equazione in una sola incognita che ho scritto. Come seconda equazione posso considerare una qualsiasi delle due:

$$\begin{cases} \frac{12-3y}{2}=\frac{7+y}{3} \\ x=\frac{7+y}{3} \end{cases}$$

svolgo i passaggi algebrici e ricavo la *y* dalla prima equazione:

$$\begin{cases} y=2 \\ x=\frac{7+y}{3} \end{cases}$$

sostituisco il valore 2 alla *y* nella seconda equazione e ottengo la soluzione:

$$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

<u>Riassumendo</u>, per risolvere un sistema col metodo del confronto:

- ricavo da entrambe le equazioni la *x* (oppure la *y*)
- come prima equazione eguaglio le espressioni trovate, come seconda scelgo una delle due (la più semplice)
- risolvo la prima equazione
- sostituisco il risultato nella seconda equazione e trovo il valore dell'altra variabile

Metodo di addizione

Nel metodo di addizione si opera sulle equazioni in modo da rendere uguale e di segno contrario nelle due equazioni il termine che contiene la *y* (successivamente farò la stessa cosa per la *x*). Per farlo, moltiplico entrambi i membri di un'equazione per uno stesso fattore (è possibile farlo per il <u>secondo principio di equivalenza</u>).

Esempio:

$$\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 3x-y=7 \end{cases}$$

moltiplico la seconda equazione per 3 in modo da avere lo stesso termine in *y* ma col segno cambiato:

$$\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 9x-3y=21 \end{cases}$$

ora sommo in verticale le due equazioni, termine a termine; in questo modo elimino il termine in *y:*

$$\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 9x-3y=21 \end{cases}$$

$$11x+0=33$$

dall'equazione ottenuta posso ricavare la *x*: $x=3$

Allo stesso modo, per trovare la *y* devo eliminare la *x*, quindi moltiplico la prima equazione per +3 e la seconda per -2. In questo modo le *x* diventano uguali e di segno contrario:

$$\begin{cases} 6x+9y=36 \\ -6x+2y=-14 \end{cases}$$
ora sommo in verticale e sparisce il termine in x:
$$\begin{cases} 6x+9y=36 \\ -6x+2y=-14 \end{cases}$$

$$+0+11y=22$$
da cui ricavo la y: $y=2$
Dunque, il risultato è:
$$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

Riassumendo, per risolvere un sistema col metodo di addizione:

- moltiplico una od entrambe le equazioni per un opportuno fattore, in modo da avere i termini con la x uguali e di segno contrario
- sommo le equazioni: ottengo un'equazione con la sola y e la risolvo; trovo la y
- moltiplico una od entrambe le equazioni per un opportuno fattore, in modo da avere i termini con la y uguali e di segno contrario
- sommo le equazioni: ottengo un'equazione con la sola x e la risolvo; trovo la x

Per la sua immediatezza, questo metodo è il più usato quando le equazioni sono numeriche.

Metodo di Cramer
Il metodo di Cramer fa uso della notazione tipica delle matrici e del concetto di determinante. E' un metodo molto usato, soprattutto nei sistemi lineari di molte equazioni.

Esempio:
$$\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 3x-y=7 \end{cases}$$
come prima cosa, scrivo i coefficienti del sistema in una tabella (matrice): la prima colonna contiene i coefficienti della x, la seconda i coefficienti della y:
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$
In entrambe le soluzioni dovrò considerare al **denominatore** il determinante di questa matrice: è un numero e per calcolarlo devo fare il prodotto fra il primo e l'ultimo termine meno il prodotto fra il secondo ed il terzo:
$$DENOMINATORE=det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}=2\cdot(-1)-3\cdot 3=-2-9=-11$$
Per calcolare, invece, i numeratori della x e della y devo considerare i determinanti di due diverse matrici. Al **numeratore della x** devo considerare il determinante della matrice che

si ottiene da quella sopra sostituendo al posto della colonna dei coefficienti delle x i termini noti:

$$NUMERATORE\ della\ x = det\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} = 12\cdot(-1) - 3\cdot 7 = -12 - 21 = -33$$

In definitiva:

$$x = \frac{-33}{-11} = 3$$

Analogamente, per calcolare il **numeratore della *y*** considero il determinante della matrice che si ottiene sostituendo alla colonna dei coefficienti delle y i termini noti:

$$NUMERATORE\ della\ y = det\begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = 2\cdot 7 - 12\cdot 3 = 14 - 36 = -22$$

$$y = \frac{-22}{-11} = 2$$

<u>Riassumendo</u>, dato un sistema del tipo: $\begin{cases} a x + b y = c \\ a' x + b' y = c' \end{cases}$, le soluzioni del sistema si possono calcolare con le seguenti espressioni:

$$x = \frac{det\begin{bmatrix} c & b \\ c' & b' \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}} \qquad y = \frac{det\begin{bmatrix} a & c \\ a' & c' \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}}$$