Lo studio di funzioni

Lo studio di funzioni è il punto di convergenza di tutto il programma di analisi nelle scuole superiori. Infatti, per poter tracciare il grafico di una funzione, vanno applicate molte delle conoscenze acquisite negli anni: algebra (polinomi, risoluzione di equazioni di grado superiore al primo), trigonometria, geometria analitica, studio di limiti, derivate etc. E', dunque, un argomento molto vasto. Lo studio approfondito e completo di una funzione si può schematizzare nei seguenti passi:

- ➔ determinazione del campo di esistenza
- ➔ determinazione degli asintoti
- ➔ valori agli estremi del campo di esistenza (limiti)
- ➔ studio della positività e negatività della funzione
- ➔ intersezioni con gli assi
- ➔ studio della derivata prima: crescenza e decrescenza della funzione, punti di massimo e di minimo
- ➔ studio della derivata seconda: concavità, convessità e flessi

Non sempre, tuttavia, è necessario svolgere tutti i punti sopra elencati per poter disegnare il grafico di una funzione, specie se quello che interessa è il comportamento della funzione stessa in un intervallo limitato, per calcolarne, ad esempio, l'integrale definito.
In questi brevi appunti, vedremo due semplici esempi di studi di funzione:

Esempio n. 1:
tracciare il grafico della funzione $\boldsymbol{y=x^3-3x^2-x+3}$

1. <u>Campo di esistenza</u>: è una funzione definita per x che va da - ∞ a +∞, cioè su tutto l'asse reale.
2. <u>Limiti</u>: per quanto riguarda i limiti della funzione agli estremi del suo campo di esistenza, si ha:

   $\lim_{x\to-\infty}(x^3-3x^2-x+3)=-\infty$ e $\lim_{x\to+\infty}(x^3-3x^2-x+3)=\infty$
3. <u>Segno della funzione e intersezioni con gli assi</u>: per trovare le intersezioni con l'asse y, poniamo $x=0$ e otteniamo:

   $y=0^3-3\cdot 0^2-0+3=3$

   cioè la curva interseca l'asse y nel punto A(*0, 3*). Le intersezioni con l'asse x, invece, si ottengono ponendo $y=0$ e risolvendo l'equazione che ne deriva:

   $x^3-3x^2-x+3=0$

   che si può risolvere ricorrendo alla scomposizione in fattori di polinomi:

   $x^3-3x^2-x+3=0\rightarrow x^2\cdot(x-3)-1\cdot(x-3)=0\rightarrow(x^2-1)\cdot(x-3)=0$

   le soluzioni si ottengono dalle due equazioni separate:

   $(x^2-1)=0\rightarrow x^2=1\rightarrow x=\pm 1$

   $(x-3)=0\rightarrow x=3$

Dunque, la curva interseca l'asse *x* in tre punti: B(*-1, 0*), C(*1, 0*) e D(*3, 0*).

4. Derivata prima della funzione e punti di massimo e minimo: la derivata prima della funzione è $y'=3x^2-6x-1$. Volendo trovare i punti di massimo e di minimo, poniamo la derivata uguale a zero:

   $$y'=3x^2-6x-1=0$$

   che ha come soluzioni:

   $$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36+12}}{6}=\frac{6\pm\sqrt{48}}{6}=\frac{6\pm 4\sqrt{3}}{6}=\frac{3\pm 2\sqrt{3}}{3}$$

   cioè $x_1 \simeq 2.1$ e $x_2 \simeq -0.15$

   Sostituendo questi valori nell'equazione della funzione, otteniamo anche le ordinate dei punti di massimo e minimo:

   $y_1 \simeq -3.1$ e $y_2 \simeq 3.1$

   Abbiamo trovato, dunque, che i punti F(*2.1, -3.1*) e G(*-0.15, 3.1*) sono punti di massimo o minimo della funzione.

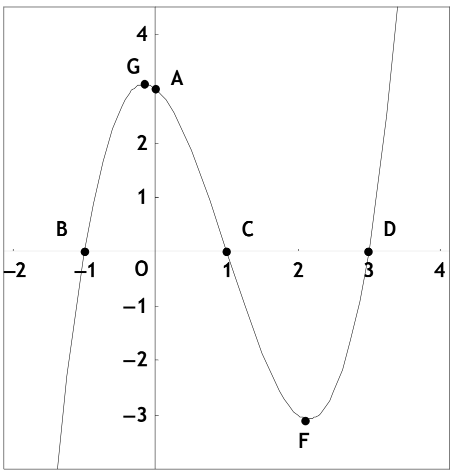
1. Derivata seconda della funzione e concavità: infine, per capire se i punti trovati sono di massimo o di minimo, calcoliamo la derivata seconda della funzione, la quale ci darà indicazioni sulla concavità o convessità:

   $$y''=6x-6$$

   Studiamo il segno della derivata seconda:

   - per *x > 1* ==> la derivata seconda è positiva, cioè la curva è concava. Ciò significa che il punto che abbiamo trovato di coordinate F(*2.1, -3.1*) è un punto di minimo
   - per *x < 1* ==> la derivata seconda è negativa, cioè la curva è convessa. Ciò significa che il punto che abbiamo trovato di coordinate G(*-0.15, 3.1*) è un punto di massimo
   - per *x = 1* ==> la derivata seconda è uguale a 0. Ciò significa che il punto (*1, 0*) è un punto di flesso, cioè il punto dove la curva passa da convessa a concava

A questo punto abbiamo informazioni sufficienti per tracciare il grafico della funzione:



Esempio n. 2:

studiare la funzione $\boldsymbol{y = \frac{x^2-4}{x-3}}$

1. Campo di esistenza: come ogni volta che si ha a che fare con una funzione frazionaria, bisogna accertarsi che il denominatore non possa annullarsi. Quando, infatti, *(x-3) = 0* la funzione perde di significato. Dunque:

   $(x-3)=0 \quad \Longrightarrow \quad x=3$

   non può esistere nel grafico della funzione nessun punto con ascissa 3. Cioè, la funzione ha un asintoto verticale nella retta di equazione *x = 3*. Il campo di esistenza della funzione è, dunque: [- ∞, +∞] - {3}.

2. Limiti: per quanto riguarda i limiti della funzione agli estremi del suo campo di esistenza, si ha:

   $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4}{x-3} = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4}{x-3} = +\infty$

   Oltre agli estremi +∞ e - ∞, bisogna anche considerare il comportamento della funzione vicino all'asintoto verticale:

   $\lim_{x\to3^-} \frac{x^2-4}{x-3} = -\infty \qquad \lim_{x\to3^+} \frac{x^2-4}{x-3} = +\infty$

3. Segno della funzione e intersezioni con gli assi: per trovare le intersezioni con l'asse delle *y*, poniamo *x = 0* e otteniamo:

   $y = \frac{0^2-4}{0-3} = \frac{4}{3}$

   cioè la curva interseca l'asse *y* nel punto A(*0, 4/3*). Le intersezioni con l'asse *x*, invece, si ottengono ponendo *y=0* e risolvendo l'equazione che ne deriva:

   $\frac{x^2-4}{x-3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2-4=0 \quad \Longrightarrow \quad x_1=-2 \quad \text{e} \quad x_2=2$

   Dunque, la curva interseca l'asse *x* in due punti: B(*-2, 0*) e C(*2, 0*).

4. Derivata prima della funzione e punti di massimo e minimo: la derivata prima della funzione è:

   $y' = \frac{2x\cdot(x-3)-1\cdot(x^2-4)}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+4}{(x-3)^2}$

   Volendo trovare i punti di massimo e di minimo, poniamo la derivata uguale a zero, che significa porre semplicemente il numeratore uguale a zero:

   $x^2-6x+4=0$

   che ha come soluzioni:

   $x_{1,2} = \frac{6\pm\sqrt{36-16}}{2} = \frac{6\pm\sqrt{20}}{2} = \frac{6\pm2\sqrt{5}}{2} = 3\pm\sqrt{5}$

cioè $x_1 \simeq 0.8$ e $x_2 \simeq 5.2$

Sostituendo questi valori nell'equazione della funzione, otteniamo anche le ordinate dei punti di massimo e minimo:

$y_1 \simeq 1.5$ e $y_2 \simeq 10.5$

Abbiamo trovato, dunque, che i punti D(*0.8, 1.5*) e F(*5.2, 10.5*) sono punti di massimo o minimo della funzione.

5. <u>Derivata seconda della funzione e concavità</u>: infine, per capire se i punti trovati sono di massimo o di minimo, calcoliamo la derivata seconda della funzione, la quale ci darà indicazioni sulla concavità o convessità:

$$y''=\frac{(2\mathrm{x}-6)(x-3)^2-2(x-3)(x^2-6x+4)}{(x-3)^4}$$

che, svolgendo i calcoli, diventa:

$$y''=\frac{10}{(x-3)^3}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

- per $x > 3$ ==> il denominatore è positivo e, dunque, lo è anche la derivata seconda, cioè la curva è concava. Ciò significa che il punto che abbiamo trovato di coordinate F(*5.2, 10.5*) è un punto di minimo
- per $x < 3$ ==> il denominatore è negativo e, dunque, lo è anche la derivata seconda, cioè la curva è convessa. Ciò significa che il punto che abbiamo trovato di coordinate D(*0.8, 1.5*) è un punto di massimo

A questo punto abbiamo informazioni sufficienti per tracciare il grafico della funzione: