La retta nel piano cartesiano

note a cura di Luigi Carlo Oldani - novembre 2009

A technique ceases to be a trick and becomes a method only when it has been encountered enough times to seem natural.
W.J.LeVeque, *Elementary Theory of Numbers*

1. Le definizioni che si possono dare riguardo il concetto di retta.

1) La retta la si può intendere come un 'concetto primitivo' e cioè come qualcosa che si conosce mediante le sue proprietà senza che ce ne sia il bisogno di darne una definizione formale, al pari del concetto di punto, di piano o di insieme.

2) La retta la si può intendere come intersezione di due piani (non paralleli e non coincidenti tra loro) nello spazio.

3) La retta, infine, la si può intendere come espressione geometrica dell'equazione $ax + by + c = 0$ nel piano cartesiano [1]. Ove x e y sono le variabili, che rimangono tali, cioè variano a seconda dei punti che si prendono in considerazione. Invece a, b e c stanno ad indicare tre numeri ben definiti una volta per tutte quando è stata precisata l'equazione di una retta. Esempio: $3x-2y+4 = 0$ sta ad indicare proprio l'equazione di una ben determinata retta nel piano cartesiano.

2. Rappresentazione dei punti e distanza tra due punti nel piano cartesiano. Il punto medio di un segmento.

Un punto nel piano cartesiano è definito da due coordinate: una coordinata orizzontale che si chiama 'ascissa' e una coordinata verticale che si chiama 'ordinata'.
Quindi si può indicare un punto nel piano cartesiano specificando le sue coordinate: ad esempio $P \equiv (5; 7)$, è un punto ben rappresentato nel piano cartesiano che ha ascissa 5 e ordinata 7.
La distanza tra due punti $A \equiv (x_A; y_A)$ e $B \equiv (x_B; y_B)$ nel piano cartesiano è data dalla formula:

$$d(A;B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

ove $d(A;B)$ sta ad indicare la distanza tra i due punti A e B. [si veda sul libro

[1] Per una dimostrazione di tipo costruttivo dell'equazione di una retta si veda la considerazione svolta in appendice.

la dimostrazione]
Esempio: dati i punti $A \equiv (3;2)$ e $B \equiv (-4;7)$, la loro distanza è data dal valore:

$$d(A;B) = \sqrt{[3-(-4)]^2 + (2-7)^2} = \sqrt{(3+4)^2 + (-5)^2} =$$
$$= \sqrt{7^2 + (-5)^2} = \sqrt{49+25} = \sqrt{74} \simeq 8.6$$

Il punto medio di un segmento è il punto che sta esattamente alla metà del segmento stesso.
Dati i punti $A \equiv (x_A;y_A)$ e $B \equiv (x_B;y_B)$, il punto medio del segmento lo si indica con la lettera M e le sue coordinate x_M e y_M - da determinarsi - sono date dalla formula:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

[Si consulti il libro di testo per la dimostrazione di queste due formule].

Esempio: per il calcolo dell'ascissa e dell'ordinata del punto medio del segmento i cui estremi sono dati dai punti $A \equiv (3;4)$ e $B \equiv (-1;2)$, si svolgono le seguenti operazioni:

$$x_M = \frac{3+(-1)}{2} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

e

$$y_M = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

3. Equazione della retta in forma implicita ed in forma esplicita.

L'equazione di una retta in forma implicita è del tipo: $ax + by + c = 0$. Con questa equazione, a seconda dei valori di a, b e c, si possono rappresentare tutte le rette nel piano cartesiano.
Ora, se si parte dall'equazione $ax + by + c = 0$ e si vuole esplicitare tale equazione rispetto alla variabile y, si deve procedere in questo modo:

$$ax + by + c = 0$$
$$by = -ax - c$$
$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Se ora denominiamo $-\frac{a}{b}$ con la lettera m, cioè $m := -\frac{a}{b}$, e denominiamo $-\frac{c}{b}$ con la lettera q, ossia $q := -\frac{c}{b}$, si ottiene che:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

si può scrivere come
$$y = mx + q.$$
Qui la lettera x viene chiamata 'variabile indipendente', mentre la lettera y viene chiamata 'variable dipendente'; m viene detto 'coefficiente angolare' e q viene detto 'termine noto' (termine che è cosí definito perchè esso è sempre costituito da un numero ben preciso nell'equazione di ogni retta al pari del coefficiente angolare m).

C'è da considerare che m viene detto coefficiente angolare perchè il suo valore numerico esprime, come vedremo meglio più avanti, l'inclinazione della retta rispetto all'asse orizzontale, ossia rispetto all'asse delle 'ascisse'.
Se il coefficiente angolare è positivo, la retta è crescente, sul grafico, da sinistra verso destra; mentre se il coefficiente angolare è negativo allora la retta è decrescente, sul grafico, da sinistra verso destra.

Osservazione: la retta che passa per il punto $O \equiv (0;0)$, cioè l'origine, deve essere tale che la sua equazione $y = mx + q$ deve essere soddisfatta dalle coordinate di tale punto (cioè dell'origine); si ha allora che: $0 = m \cdot 0 + q$, da cui se ne trae che $0 = 0 + q$, quindi $q = 0$. Da ciò ne segue che affinché una retta in forma esplicita, cioè del tipo $y = mx + q$, passi per l'origine deve essere $q = 0$. Si può cosí dire che le rette passanti per l'origine saranno tutte del tipo $y = mx$, per cui in esse non deve mai comparire il termine noto q.

4. Rappresentazione nel piano cartesiano dell'equazione di una retta.

Per rappresentare una retta nel piano cartesiano occorre che l'equazione della retta sia in forma esplicita.
Se si ha l'equazione di una retta scritta in questo modo:
$$3x - 2y + 5 = 0$$
occorre, per rappresentare la retta nel piano cartesiano, scrivere tale equazione in forma esplicita.
Si ha cosí:
$$-2y = -3x - 5$$
$$y = \frac{-3}{-2}x + \frac{-5}{-2}$$
$$y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}.$$

Ora, per disegnare tale retta occorre determinare due punti di essa: si assegna allora un valore arbirario alla variabile x, ad esempio $x = 1$ e si ottiene per y il valore
$$y = \frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{5}{2}$$

quindi

$$y = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

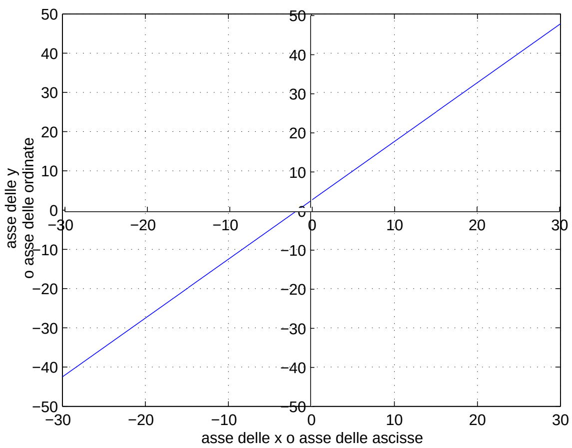
Si determina cosí un punto C di coordinate $C \equiv (1; 4)$ attraverso il quale passa la retta in questione.
Se poi si assegna alla variabile x il valore 2, cioè $x = 2$, si ha che:

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{2} \cdot 2 + \frac{5}{2} = \\ &= 3 + \frac{5}{2} = \\ &= \frac{3 \cdot 2 + 5}{2} = \\ &= \frac{6+5}{2} = \\ &= \frac{11}{2} \simeq 5.5 \end{aligned}$$

Si è cosí determinato un secondo punto E le cui coordinate sono: $E \equiv (2; \frac{11}{2})$ attraverso il quale passa ancora la retta in esame.
Ora, *per due punti distinti nel piano passa una e una sola retta*, quindi una volta trovati questi due punti basta disegnare nel piano cartesiano la retta passante per essi per avere cosí la rappresentazione grafica della retta.
La retta di equazione

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

ha la seguente rappresentazione grafica nel piano cartesiano:

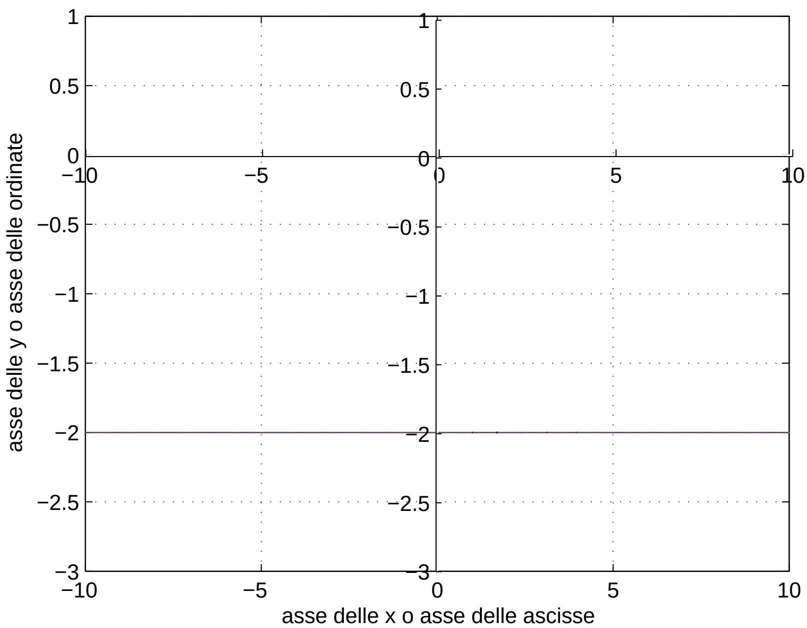


Osservazione: è convenzione comune considerare nel piano cartesiano: come

I quadrante, il quadrante con le ascisse positive e con le ordinate positive; come II quadrante il quadrante con le ascisse negative e le ordinate positive; come III quadrante, il quadrante con le ascisse negative e le ordinate negative; infine come IV quadrante, il quadrante con le ascisse positive e le ordinate negative.

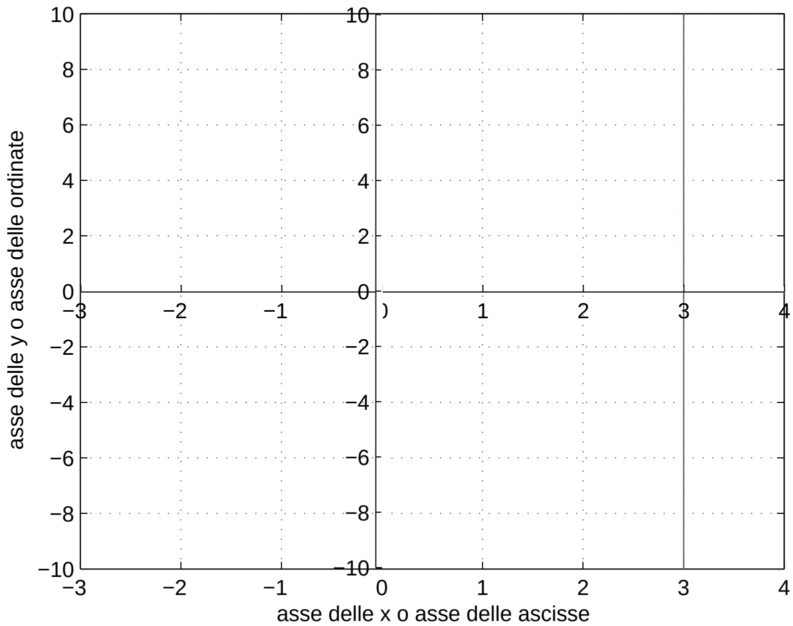
5. Rette parallele all'asse delle x (o delle ascisse) e rette parallele all'asse delle y (o delle ordinate). Equazioni degli assi cartesiani.

Le rette parallele all'asse delle x sono del tipo $y = k$, ove k è un numero qualsiasi.
Ad esempio la retta $y = -2$ ha la seguente rappresentazione grafica nel piano cartesiano:



Inoltre, data l'espressione della retta in forma esplicita $y = mx + q$, per ottenere l'equazione $y = -2$ basta scegliere $m = 0$ e $q = -2$. Mentre, data l'espressione della retta in forma implicita $ax + by + c = 0$, per ottenere l'equazione $y = -2$, basta scegliere $a = 0$, $b = 1$ e $c = 2$.

Le rette parallele all'asse delle ordinate sono del tipo $x = k$, ove k è un numero qualsiasi.
Ad esempio la retta $x = 3$ ha la seguente rappresentazione grafica nel piano cartesiano:



Ora, se si ha l'espressione della retta in forma implicita, cioè del tipo $ax + by + c = 0$, per ottenere l'equazione $x = 3$, basta scegliere $a = 1$, $b = 0$ e $c = -3$. Mentre se si ha l'espressione della retta in forma esplicita, cioè del tipo $y = mx + q$, non si riesce a trovare alcun valore di m e di q per individuare l'equazione della retta $x = 3$. Per cui con l'espressione della retta in forma esplicita non si riescono mai a individuare [e quindi neppure a rappresentare] le rette parallele all'asse delle y.

Dato il discorso appena svolto e comprese le rappresentazioni grafiche delle rette $y = k$ e $x = k$, l'asse delle x ha come propria equazione: $y = 0$; mentre l'asse delle y ha come propria equazione: $x = 0$. Questo, perchè sull'asse delle x sono rappresentati tutti i punti con ordinata nulla e, quindi, per individuare l'equazione dell'asse delle x basta porre la y, che è l'ordinata, uguale a 0.
Invece, poichè sull'asse delle y sono rappresentati tutti i punti con ascissa nulla, per individuare l'equazione di tale asse, basta porre la x, che è l'ascissa, uguale a 0.

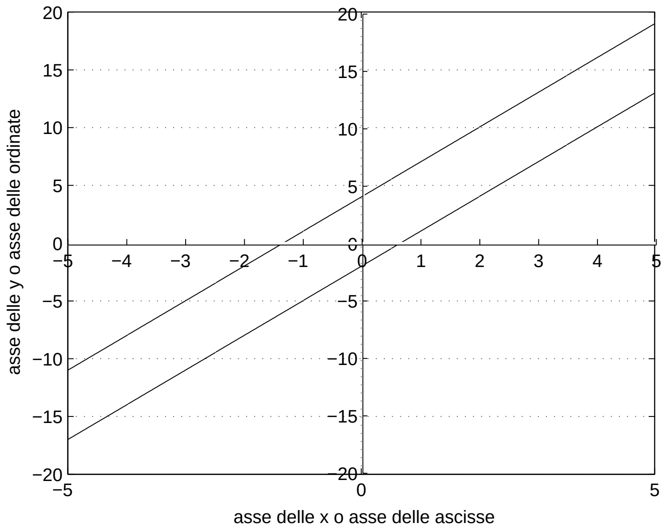
6. Rette parallele e rette perpendicolari.

parallelismo

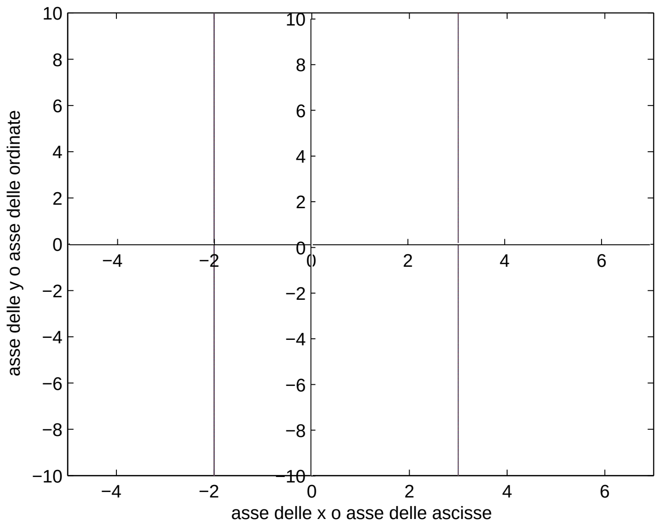
Date due rette, in forma esplicita, del tipo $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$, tali rette sono parallele se hanno lo stesso coefficiente angolare, cioè se $m = m'$. Due rette, in termini generali, possono essere parallele anche quando esse sono

entrambe parallele all'asse delle y.
Il caso, poi, di rette entrambe parallele all'asse delle x, quindi rette del tipo $y = k$ e $y = k'$, rientra invece nel caso che le rette hanno entrambe lo stesso coefficiente angolare m, che risulta essere per esse uguale a 0.

Esempio: le equazioni di due rette del tipo $y = 3x - 2$ e $y = 3x + 4$ hanno nel piano cartesiano la seguente rappresentazione:



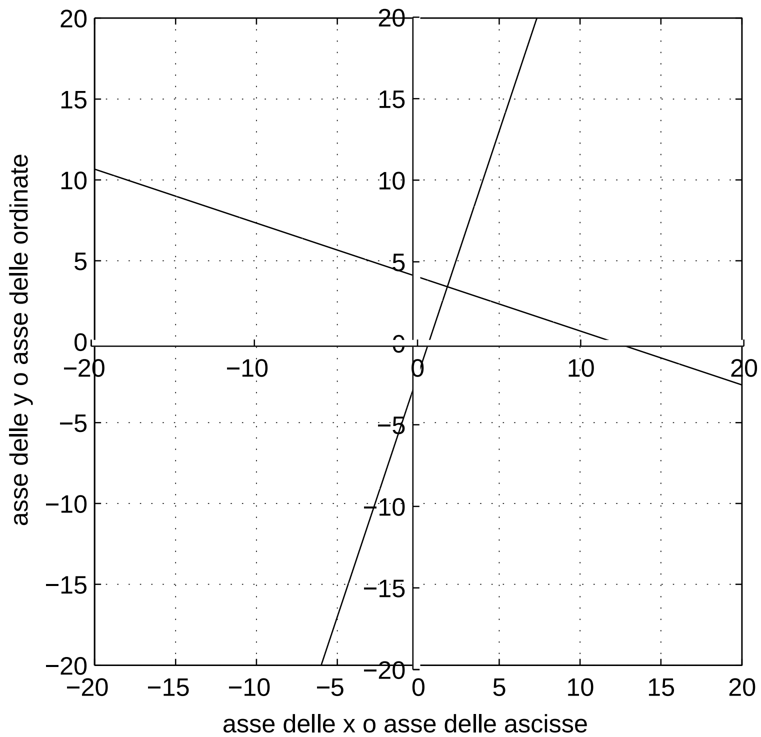
Le rette $x = -2$ e $x = 3$ hanno invece la seguente rappresentazione grafica:



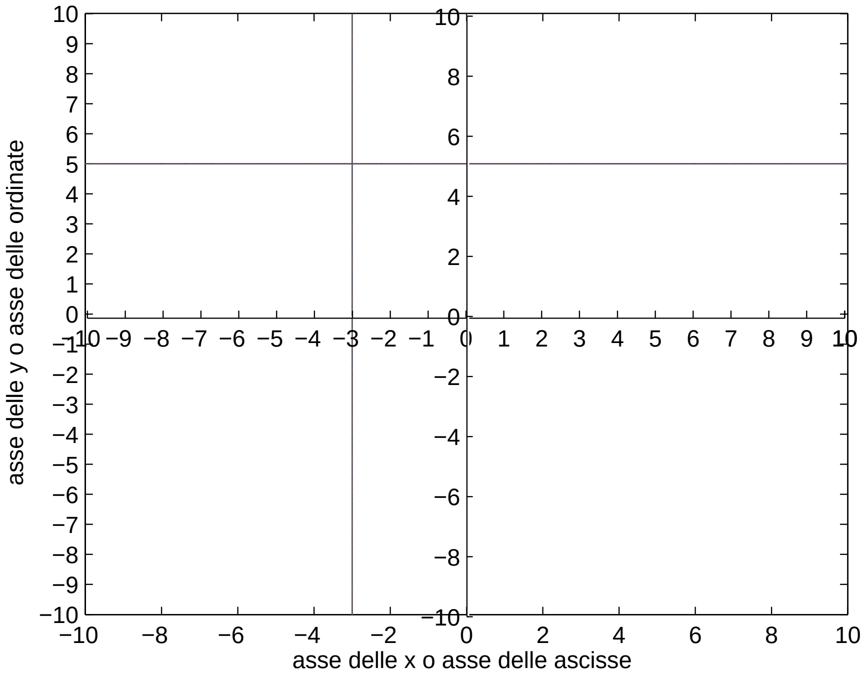
perpendicolarità

Date due rette in forma esplicita del tipo $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$, tali rette sono perpendicolari se vale che $m \cdot m' = -1$, cioè se $m = -\dfrac{1}{m'}$, ossia se il coefficiente angolare di una retta è l'opposto dell'inverso del coefficiente angolare dell'altra retta.
Due rette, in termini generali, possono essere perpendicolari tra loro anche quando una di tali rette è parallela all'asse delle y e l'altra retta è parallela all'asse delle x.

Esempio: le equazioni di due rette del tipo $y = 3x - 2$ e $y = -\dfrac{1}{3}x + 4$ hanno nel piano cartesiano la seguente rappresentazione grafica:



Le rette $x = -3$ e $y = 5$ hanno invece la seguente rappresentazione grafica:



7. Equazione della retta passante per due punti.

Come già riferito, per due punti distinti nel piano passa una e una sola retta; ora, dati due punti nel piano, punti che non hanno la stessa ascissa né la stessa ordinata, $A \equiv (x_A; y_A)$ e $B \equiv (x_B; y_B)$, l'equazione della retta passante per tali punti è data dalla formula:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$$

Esempio: dati i punti $A \equiv (3; -5)$ e $B \equiv (2; 1)$, l'equazione della retta passante per essi è data dalla formula:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$$

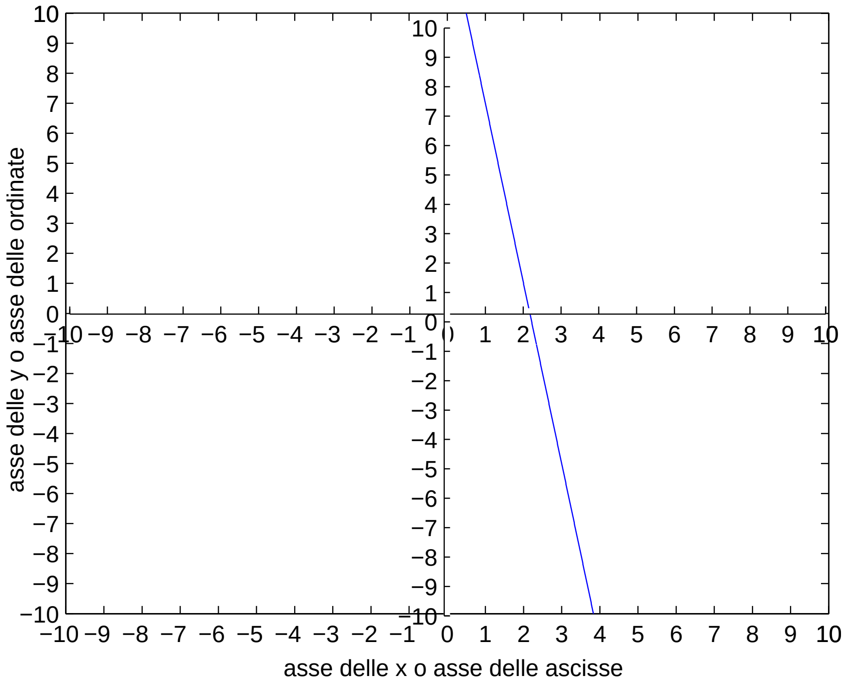
$$\frac{y - (-5)}{1 - (-5)} = \frac{x - 3}{2 - 3}$$

$$\frac{y + 5}{1 + 5} = \frac{x - 3}{-1}$$

$$\frac{y + 5}{6} = -x + 3$$

$$y + 5 = -6x + 18$$
$$y = -6x + 18 - 5$$
$$y = -6x + 13$$

La rappresentazione grafica di tale retta è la seguente:



Osservazione:

1] La bisettrice del I e del III quadrante deve passare, ad esempio, per i punti $A \equiv (1;1)$ e $B \equiv (2;2)$. La retta che ne segue avrà cosí equazione:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$$
$$\frac{y-1}{2-1} = \frac{x-1}{2-1}$$
$$\frac{y-1}{1} = \frac{x-1}{1}$$

da cui si ha che:

$$y - 1 = x - 1$$

e quindi

$$y = x - 1 + 1$$

$$y = x.$$

La bisettrice del I e del III quadrante ha cosí equazione: $y = x$.

2] La bisettrice del II e del IV quadrante deve passare, ad esempio, per i punti $A \equiv (-1; 1)$ e $B \equiv (-2; 2)$, la retta che ne segue avrà cosí equazione:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$$

$$\frac{y - 1}{2 - 1} = \frac{x - (-1)}{-2 - (-1)}$$

$$\frac{y - 1}{1} = \frac{x + 1}{-2 + 1}$$

$$y - 1 = \frac{x + 1}{-1}$$

$$y - 1 = -x - 1$$

da cui si ha che:

$$y = -x - 1 + 1$$

e quindi

$$y = -x.$$

La bisettrice del II e IV quadrante ha cosí equazione: $y = -x$.

Nota: qualora i punti hanno o la stessa ascissa o la stessa ordinata, si deve procedere in altro modo. E, precisamente: se il punto A ha valori $A \equiv (x_A; y_A)$ e il punto B ha valori $B \equiv (x_B; y_B)$ e se si è nella situazione in cui:
1) $x_A = x_B$, la retta risultante ha equazione $x = x_A$;
2) oppure se $y_A = y_B$, la retta risultante ha equazione $y = y_A$.

8. Verifica se un punto appartiene o no ad una retta data.

Se un punto P ha coordinate $P \equiv (x_P; y_P)$ e una retta ha equazione $ax + by + c = 0$ [equazione della retta in forma implicita], affinché, il punto P appartenga alla retta deve valere l'identità: $ax_P + by_P + c = 0$.
Allo stesso modo, affinché, il punto P appartenga alla retta di equazione $y = mx + q$ [equazione della retta in forma esplicita], deve essere che vale la relazione $y_P = mx_P + q$.

Esempio 1]: si ha la retta di equazione $-4x + 3y - 7 = 0$ e il punto P

di coordinate $P \equiv (2;5)$. Perché il punto P appartenga alla retta, deve valere l'identità: $-4 \cdot 2 + 3 \cdot 5 - 7 = 0$. E, svolgendo i conti, accade proprio che $-8+15-7$ vale 0. Quindi, in questo caso, il punto P appartiene alla retta in questione.

Esempio 2]: si ha la retta di equazione $-4x + 3y - 4 = 0$ e il punto P di coordinate $P \equiv (1;-3)$; affinché il punto P appartenga alla retta deve essere che: $-4 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) - 4 = 0$; ossia deve essere $-4 - 9 - 4 = 0$. Ma ciò non è vero, in quanto $-17 \neq 0$. Quindi, in questo caso, il punto $P \equiv (1;-3)$ non appartiene alla retta $-4x + 3y - 4 = 0$.

Esempio 3]: si ha la retta di equazione $y = -2x + 1$ e il punto P di coordinate $P \equiv (4;-7)$. Affinché il punto P appartenga a tale retta, deve valere l'identità: $-7 = -2 \cdot 4 + 1$; cosa, questa, che è vera in quanto $-7 = -8 + 1$ comporta l'identità: $-7 = -7$.

Esempio 4]: si ha sempre la retta di equazione $y = -2x + 1$ e il punto P di coordinate $P \equiv (-2;3)$. Affinché il punto P appartenga a tale retta, deve valere l'identità: $3 = -2 \cdot (-2) + 1$. Ma sviluppando i calcoli si ottiene: $3 = 4 + 1$; ossia $3 = 5$. Cosa questa che non è ovviamente vera. E, quindi, il punto P di coordinate $P \equiv (-2;3)$ non appartiene alla retta di equazione $y = -2x + 1$.

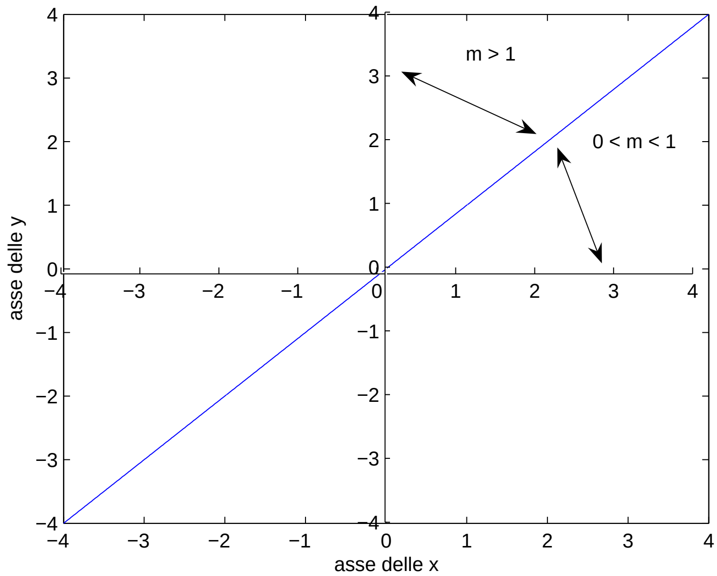
9. Coefficiente angolare di una retta.

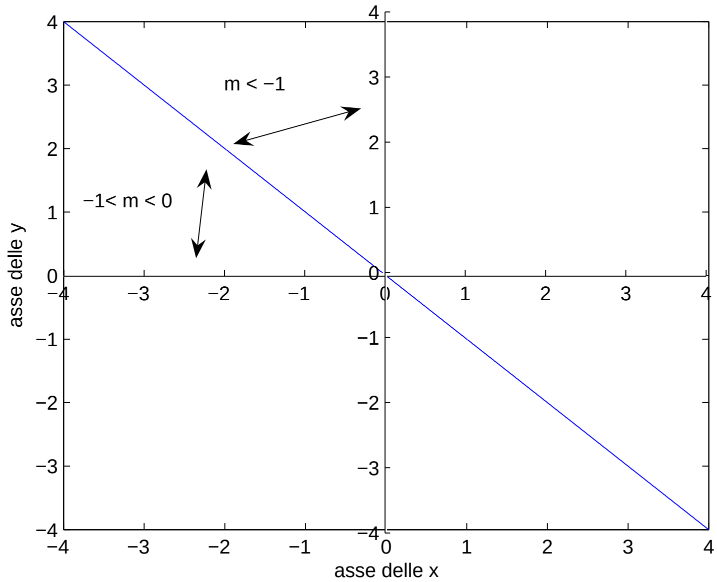
Il coefficiente angolare di una retta è quel numero che compare moltiplicato alla variabile x una volta che l'equazione della retta è stata posta in forma esplicita.
Ad esempio, data la retta di equazione $2x - 3y + 8 = 0$, una volta che si è posta tale equazione in forma esplicita, si ha: $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$. Il coefficiente angolare di tale retta avrà dunque valore: $\frac{2}{3}$.
Riguardo il "coefficiente angolare" di una retta si ravvisa già dalla sua denominazione che esso non è esattamente un angolo, ma bensí un *coefficiente* che esprime il valore di un angolo e che permette di avere un'idea dell'inclinazione della retta rispetto all'asse orizzontale o, che si dica, asse delle x.

In generale, dati due punti distinti, e aventi ascissa diversa, $P \equiv (x_P; y_P)$ e $Q \equiv (x_Q; y_Q)$ la formula per determinare il coefficiente angolare della retta passante per questi due punti è la seguente:

$$m = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}.$$

Uno studio attento del coefficiente angolare di una retta ci consente di individuare per esso i seguenti valori numerici:





9.1 Il coefficiente angolare dell'asse delle y.

Il valore del coefficiente angolare dell'asse delle y lo si può intuire procedendo nel modo che segue.
L'equazione della retta in forma implicita è $ax + by + c = 0$ e l'asse delle y ha equazione $x = 0$. Ora, per avere $x = 0$ dall'equazione della retta in forma

implicita, occorre porre in tale equazione (ossia quella della retta in forma implicita) $b = 0$, $c = 0$ e $a \neq 0$. Ma se noi passiamo dall'equazione della retta in forma implicita all'equazione della retta in forma esplicita, arriviamo a considerare l'equazione $y = mx + q$, ove $m := -\frac{a}{b}$ e $q := -\frac{c}{b}$. Se qui, in particolare in $m = -\frac{a}{b}$, poniamo $b = 0$ (per avere l'equazione dell'asse y), abbiamo una frazione che ha il denominatore nullo e il numeratore $a \neq 0$. Dunque il coefficiente angolare dell'asse delle y corrisponde a una frazione con denominatore nullo e numeratore diverso da zero. Ebbene, quando una frazione ha denominatore nullo e numeratore diverso da zero, come in questo caso, il risultato dell'intera frazione assume valore infinito, in simboli ∞. Valore, questo, che non è un valore numerico in quanto l'insieme dei numeri reali, ossia l'insieme di tutti i numeri che possono stare su una retta orientata è compreso tra $-\infty$ e $+\infty$, estremi esclusi. In simboli $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ [ove $-\infty$ e $+\infty$ non appartengono ai numeri reali].
Quindi l'asse delle y ha un coefficiente angolare - da notare che è sempre di coefficiente angolare che si sta parlando e non di angolo - pari a ∞, anche se tale valore, come detto, non appartiene ai numeri reali.

Nota: come si vedrà in un comune corso di trigonometria, il coefficiente angolare di una retta non è nient'altro che la tangente trigonometrica che ha come angolo esattamente l'angolo che forma qualunque retta in questione con l'asse delle x. E, difatti, la tangente trigonometrica vale 0 a 0^0, vale 1 a 45^0 e vale $+\infty$ per un angolo prossimo [in senso antiorario] a 90^0.

10. Equazione della retta passante per un punto ed avente coefficiente angolare dato.

L'equazione di una retta passante per un punto, ad esempio $P \equiv (x_P; y_P)$, ed avente coefficiente angolare dato, ad esempio m, è la seguente:

$$y - y_P = m(x - x_P).$$

Esempio: determinare l'equazione della retta passante per $P \equiv (2; -1)$ e parallela alla retta $y = 5x + 20$.

Ora, la retta da determinarsi, essendo parallela alla retta $y = 5x + 20$, deve avere, per la condizione di parallelismo, lo stesso coefficiente angolare di quest'ultima, quindi $m = 5$, e deve passare per il punto $P \equiv (2; -1)$.
Applicando la formula, si ha che:

$$y - (-1) = 5(x - 2)$$
$$y + 1 = 5x - 10$$
$$y = 5x - 10 - 1$$

$$y = 5x - 11$$

Esempio: determinare l'equazione della retta passante per $P \equiv (2; -1)$ e perpendicolare alla retta $y = 5x + 20$.

Ora, la retta da determinarsi, essendo questa perpendicolare alla retta $y = 5x + 20$, deve avere per la condizione di perpendicolarità $m = -\dfrac{1}{5}$ e deve passare per il punto $P \equiv (2; -1)$.
Applicando la formula, si ha che:

$$y - (-1) = -\frac{1}{5}(x - 2)$$
$$y + 1 = -\frac{1}{5}x + \frac{1}{5} \cdot 2$$
$$y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5} - 1$$
$$y = -\frac{1}{5}x + \frac{2 - 5}{5}$$
$$y = -\frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$$

11. Distanza di un punto da una retta.

Dato un punto $P \equiv (x_P; y_P)$ e data una retta r in forma implicita, cioè del tipo $ax + by + c = 0$, la distanza del punto $P \equiv (x_P; y_P)$ dalla retta r è data dalla formula:

$$d(P; r) = \frac{\mid ax_P + by_P + c \mid}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Per comprendere appieno tale formula occorre avere ben chiaro il concetto di valore assoluto di un numero. Dato un qualunque numero x, si scrive il valore assoluto di x come: $\mid x \mid$.
Il valore assoluto di un numero è un concetto molto semplice: il valore assoluto di un numero positivo lascia il numero come tale, per cui $\mid 5 \mid = 5$; mentre il valore assoluto di un numero negativo lo trasforma in positivo, per cui si ha che: $\mid -4 \mid = 4$.
Esempio: dato il punto $P \equiv (3; 4)$ e data la retta - una volta che è stata posta in forma implicita - di equazione $2x - 3y + 2 = 0$, la distanza di tale punto P dalla retta in questione viene calcolata nel modo seguente:

$$d(P; r) = \frac{\mid ax_P + by_P + c \mid}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$= \frac{|\ 2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 + 2\ |}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} =$$

$$= \frac{|\ 6 - 12 + 2\ |}{\sqrt{4 + 9}} =$$

$$= \frac{|\ 8 - 12\ |}{\sqrt{13}} = \frac{|\ -4\ |}{\sqrt{13}} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{13}} \simeq 1.109$$

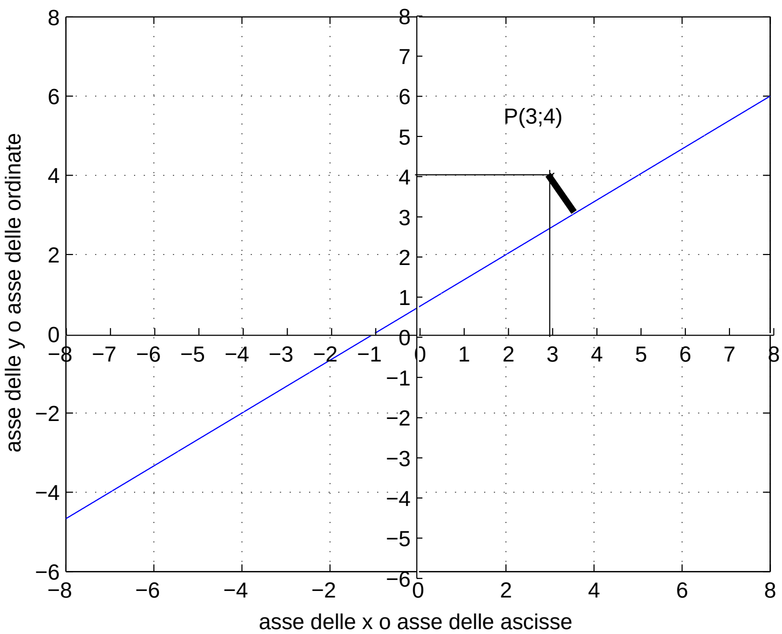
La retta di equazione $2x - 3y + 2 = 0$ ha la seguente espressione esplicita:

$$-3y = -2x - 2$$

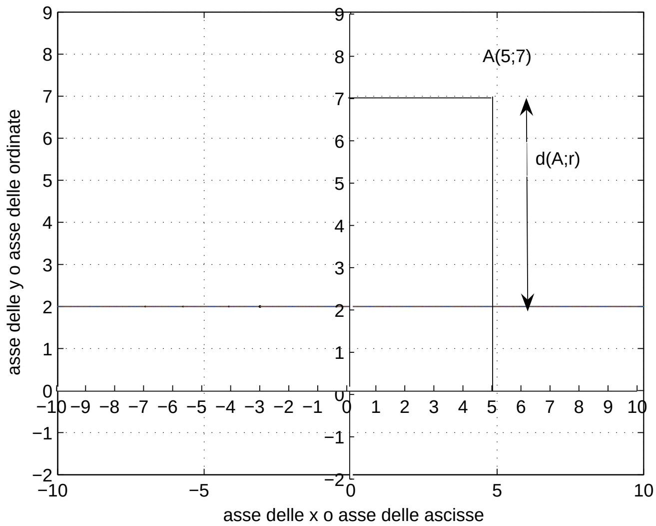
$$3y = 2x + 2$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Nel grafico qui di seguito si può vedere la distanza reciproca tra il punto
$P \equiv (3; 4)$ e la retta r di equazione $y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$.



Osservazione: se la retta in questione è parallela agli assi cartesiani, la determinazione della distanza di un punto qualunque da essa è molto semplice: ad esempio, data la retta r di equazione $y = 2$ e il punto $A \equiv (5; 7)$, allora la distanza tra A e la retta r è data, come si vede bene dal grafico successivo, dal valore $d(A; r) = \mid 7 - 2 \mid = \mid 5 \mid = 5$. Lo stesso dicasi per la distanza di un punto qualunque da una retta parallela all'asse delle y.



12. Determinazione del punto di intersezione di due rette.

L'eventuale punto di intersezione di due rette - si noti che se due rette sono tra loro parallele non hanno alcun punto di intersezione e se sono coincidenti hanno infiniti punti di intersezione - deve soddisfare contemporaneamente le equazioni delle due rette. Per fare questa operazione occorre mettere a sistema le equazioni delle due rette e determinare la soluzione comune di tale sistema. Vediamo come si può agire in questo caso: si voglia ad esempio determinare il punto di intersezione tra le rette di equazione $y = 3x - 2$ e $y = 2x - 1$:

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ 3x - 2 = 2x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ 3x - 2x = 2 - 1 \end{cases}$$

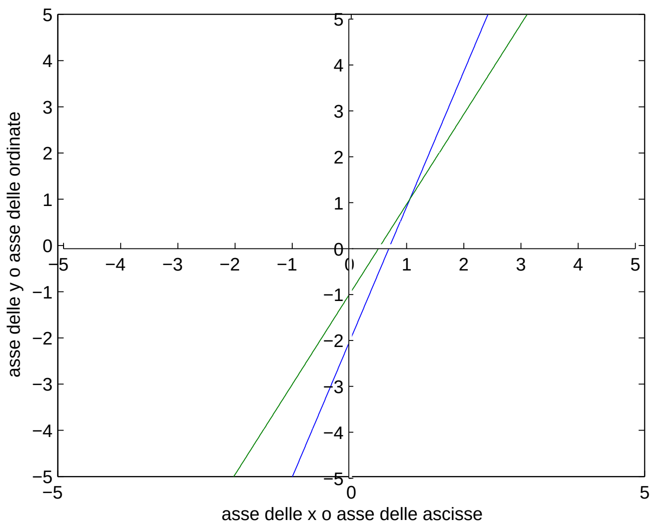
$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \cdot 1 - 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 - 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

La rappresentazione grafica delle due rette è data da:



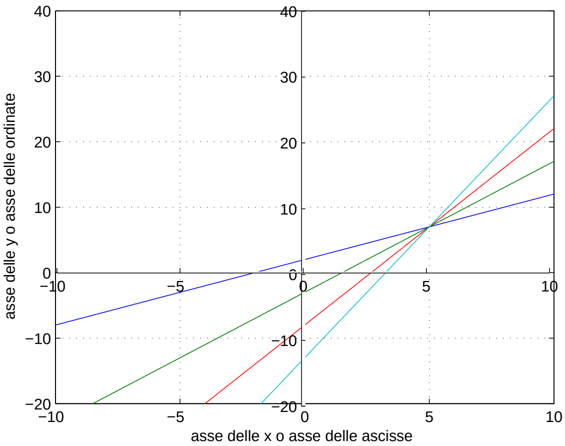
Come si vede dal grafico il punto di intersezione delle due rette ha ascissa 1 e ordinata 1, quindi è proprio il punto di coordinate (1;1).

13. Fasci di rette propri ed impropri.

Un *fascio di rette proprio* è costituito dall'insieme delle rette del piano che passano tutte per uno stesso punto.
Un fascio proprio è l'insieme delle rette del piano definito dalla seguente equazione: $y - y_0 = m(x - x_0)$, ove $(x_0; y_0)$ sono le coordinate del punto attraverso il quale passano tutte le rette del fascio in questione, che variano al variare di m [esclusa però la retta del fascio parallela all'asse y che ha, in questo caso, equazione $x = x_0$].

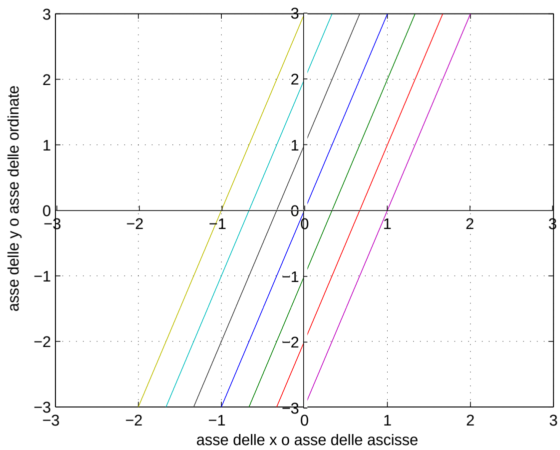
Ad esempio, dato il punto $P \equiv (5; 7)$, e definito il fascio proprio di rette passanti per questo punto con l'equazione $y - 7 = m(x - 5)$, ossia $y = mx - 5m + 7$ [ove m è un numero che varia da retta a retta ed assume tutti i valori numerico-reali possibili], la rappresentazione sul piano cartesiano del fascio di tali rette è data dal grafico seguente [grafico, questo, di rette definito per alcuni valori di

m scelti arbitrariamente]:



Un *fascio di rette improprio* è invece costituito dall'insieme di rette che sono tutte parallele tra di loro.
Un fascio improprio è l'insieme delle rette definito dalla seguente equazione: $y = hx + l$, ove l è un numero che varia da retta a retta ed assume tutti i valori numerico-reali possibili, mentre il coefficiente angolare h è il medesimo per tutte le rette del fascio.
Riguardo all'equazione del fascio di rette improprio, che si riferisce al caso di tutte le rette parallele all'asse delle y, occorre precisare che tale fascio ha equazione $x = k$, e k varia tra tutti i valori numerico-reali possibili.

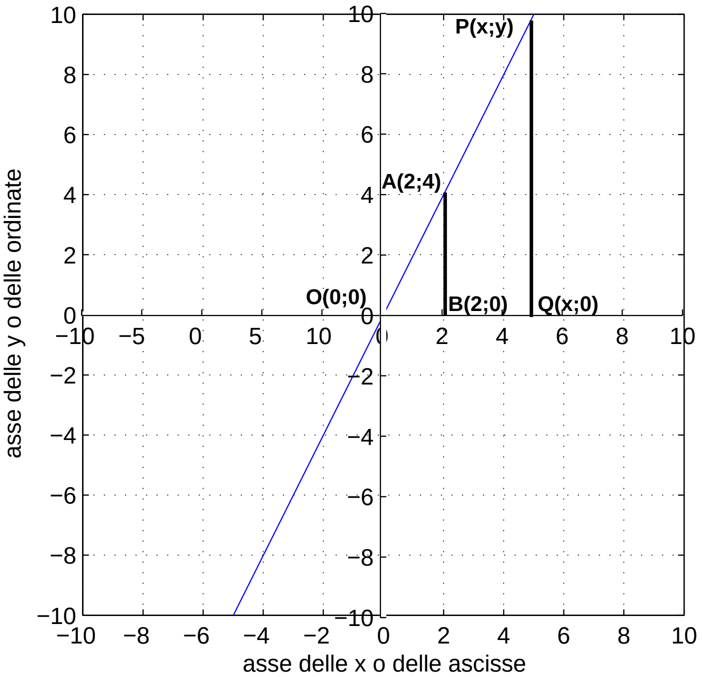
Una rappresentazione sul piano cartesiano del fascio di rette definito dall'equazione $y = 3x + l$ è data dal grafico seguente [grafico, questo, di rette definito per alcuni valori di l scelti arbitrariamente]:



Nota in appendice

Si consideri inizialmente una generica retta r passante per l'origine $O \equiv (0;0)$ e per un determinato punto A di coordinate $(2;4)$. Sia $P \equiv (x;y)$ un generico punto della retta r. Ci si chiede: che relazione deve sussistere tra l'ascissa x e l'ordinata y di tale generico punto P perchè esso possa appartenere alla retta passante per l'origine $O \equiv (0;0)$ e per il punto $A \equiv (2;4)$?

Si osservi, a tal riguardo, la figura qui sotto rappresentata:



I triangoli OAB e OPQ sono simili, avendo entrambi un angolo retto e l'angolo in $O \equiv (0;0)$ in comune. Si può allora scrivere la proporzione:

$$AB : OB = PQ : OQ$$

da cui, sostituendo i valori corrispondenti, si ha che:

$$4 : 2 = y : x$$

ossia

$$y = \frac{4}{2} \cdot x$$

Si riesce allora a scrivere la relazione $y = 2x$. Relazione, questa, che può anche essere scritta nel seguente modo:

$$2x - y = 0.$$

Quanto è stato scritto, è possibile esprimerlo per una qualunque retta passante per l'origine $O \equiv (0;0)$; dato che il punto A, infatti, è stato scelto arbitrariamente. Ora se A avesse coordinate, anzichè $(2;4)$, x_B e y_B, fatti i debiti calcoli, si otterrebbe una proporzione del tipo:

$$y_B : x_B = y : x$$

Da cui:

$$y = \frac{y_B}{x_B} \cdot x$$

$$y \cdot x_B - x \cdot y_B = 0.$$

Quindi, in generale, se chiamiamo x_B con la lettera b e chiamiamo $-y_B$ con la lettera a, si ottiene proprio una scrittura generale, per l'equazione della retta passante per l'origine, del tipo: $ax + by = 0$.

Si noti, poi, che se a tale equazione si aggiunge il termine generico *di traslazione* c [termine, questo, che, se diverso da 0, non permette più alla retta di passare per l'origine $O \equiv (0;0)$], si arriva in questo modo ad ottenere, per l'equazione di una generica retta nel piano cartesiano, proprio una scrittura generalizzata del tipo:

$$ax + by + c = 0.$$

□