Limiti notevoli

Alcuni limiti danno luogo a forme indeterminate non risolvibili per via algebrica. Essi vengono risolti con altri procedimenti (p. e. geometrici) e vengono assunti come punto di partenza per la risoluzione di altri limiti di forma simile. Questi limiti vengono detti **limiti notevoli.**

1. Limite notevole senx/x

Si vuole dimostrare il seguente limite notevole:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1}$$

Procediamo per via geometrica. Nella circonferenza goniometrica sia x un angolo (per comodità di dimostrazione lo prendiamo acuto) e siano P e T i punti che il raggio individuato da x interseca rispettivamente sulla circonferenza e sulla retta tangente in A. Sia, infine, H la proiezione di P sull'asse x (vedi fig. 6).
L'arco AP risulta evidentemente di lunghezza compresa tra le misure dei segmenti PH e AT:

$$\overline{PH} \le A\widehat{P} \le \overline{AT}$$

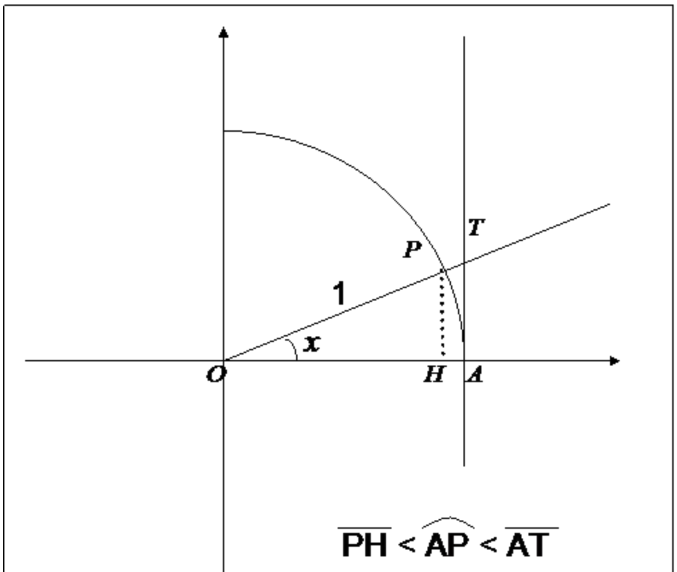

Figura 6

Essendo $\overline{PH} = senx$, $A\widehat{P} = x$ (misurato in radianti) e $\overline{AT} = tgx = \frac{senx}{\cos x}$ si avrà:

$$senx \le x \le \frac{senx}{\cos x}$$

Dividendo tutti i termini delle disuguaglianze per $senx$ (sicuramente positivo essendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$)

$$\frac{\cancel{senx}}{\cancel{senx}} \le \frac{x}{senx} \le \frac{\cancel{senx}}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cancel{senx}}$$

$$1 \le \frac{x}{senx} \le \frac{1}{\cos x}$$

Invertendo i termini delle disuguaglianze (e cambiando i versi delle disuguaglianze)

$$\cos x \le \frac{senx}{x} \le 1$$

Al tendere di $x \to 0$ le quantità esterne tendono entrambe a 1 ($\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ e la funzione y=1 è costante) per cui, per il *teorema del confronto* (cfr. T3.3) anche la quantità interna tende allo stesso valore.

c.v.d.

2. Il numero di Nepero "e"

Anche il numero di Nepero $e = 2{,}718282...$, base dei logaritmi naturali, è il limite di una forma indeterminata del tipo 1^0. Si ha infatti:

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

La dimostrazione di questo limite notevole è omessa.

3. Altri limiti

Dai limiti notevoli sopra esposti se ne deducono altri che elenchiamo di seguito (le dimostrazioni sono omesse)

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$	$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$
$\lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1$	$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$