Matrici e trasformazioni

di vincenzo scudero

PREMESSA

Data la matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Si chiama matrice trasposta di A la matrice ottenuta da A scambiano tra loro le righe con le colonne

$$A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Se il determinante di A è non nullo, si definisce matrice inversa di A la matrice A^{-1} tale che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ essendo I la matrice identica:

$$A^{-1} = \frac{1}{det\, A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

TRASFORMAZIONI LINEARI

Una trasformazione *T* del piano è detta *lineare* se è individuata da equazioni del tipo

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$$

I termini noti *e* ed *f* individuano la traslazione associata al vettore OO'(*e*; *f*). Nel caso di una trasformazione che lascia fissa l'origine tali coefficienti si annullano. La trasformazione *T* , in questo caso, è rappresentata dalle equazioni

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

Alla trasformazione *T* è associata la matrice dei coefficienti $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Se det$A \neq 0$ allora esiste la matrice inversa A^{-1} e la trasformazione si dice ***invertibile***. Una trasformazione lineare invertibile è detta ***affinità***

Proprietà

- Il *determinante della matrice* di una affinità, in valore assoluto, è uguale al *rapporto tra le aree* della "vecchia" figura e della sua trasformata (in particolare in una isometria |det*A*|=1).
- Se *detA>0* l'affinità si dice *diretta* (in tal caso i punti non abbandonano il piano durante la trasformazione)

- Se *$detA<0$* l'affinità si dice *invertente* (in tal caso i punti abbandonano il piano durante la trasformazione)

ISOMETRIE

Sussiste il seguente teorema (non dimostrato)

Teorema: ***Una affinità è una isometria $\Leftrightarrow$ $|detA|=1$ e $A^T=A^{-1}$***

Le isometrie che non mutano l'origine sono le simmetrie assiali e le rotazioni (la simmetria centrale è una rotazione di 180°). Classificare una isometria dalla matrice ad essa associata è possibile mediante pochi passaggi:

1. in base al teorema precedente, condizione necessaria e sufficiente perché la trasformazione T sia una isometria è che $|detA|=1$ e $A^T=A^{-1}$. Bisogna quindi, dapprima, verificare tale situazione;
2. il determinante della matrice avrà quindi uno dei seguenti valori: +1 oppure –1. Nel primo caso la trasformazione è diretta in quanto il determinante è positivo e quindi l'unica isometria diretta che non muta l'origine è una **rotazione**. Il secondo caso (determinante pari a –1) è indice di una isometria invertente, quindi la trasformazione non può che essere una **simmetria assiale**;
3. nel caso di una **rotazione** la matrice associata $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ deve essere del tipo $\begin{bmatrix} cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}$ e quindi deve essere necessariamente $\begin{cases} cos\alpha = a \\ sen\alpha = c \end{cases}$ da cui è possibile conoscere il *l'angolo di rotazione α*.
4. nel caso di una simmetria assiale è possibile conoscere *l'angolo α che l'asse di simmetria forma con l'asse x* mediante la seguente relazione $\begin{cases} cos2\alpha = a \\ sen2\alpha = c \end{cases}$ da cui è possibile determinare l'angolo 2α e quindi α.

OMOTETIA

Se la matrice *A* associata alla trasformazione *T* si presenta nella forma $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ (con $k \neq 0$) la trasformazione non può che essere una **omotetia**. Il determinante di tale matrice (k^2) risulta sempre positivo (l'omotetia è una trasformazione sempre diretta) e il valore *k* rappresenta il *rapporto di omotetia*.

SIMILITUDINE

La similitudine è una trasformazione composta da una *isometria* e da una *omotetia*. A secondo che l'isometria componente è una *rotazione* o una *simmetria centrale* la similitudine risulta *diretta* oppure *invertente*. Il determinante della matrice associata ci indicherà quale tipo di similitudine sia *T*.

La struttura della matrice associata sarà, in ogni caso, come una delle seguenti

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix}$$

similitudine diretta — *similitudine invertente*

(gli elementi di ciascuna diagonale sono uguali in valore assoluto, e solo in una diagonale sono opposti)

Nel primo caso si tratta di una similitudine composta da una rotazione e da una omotetia (*$detA=a^2+b^2=k^2>0$)*
Nel secondo caso si tratta di una similitudine composta da una simmetria assiale e da una omotetia (*$detA=-a^2-b^2=$ $=-k^2<0$*)

L'omotetia avrà rapporto pari a $\sqrt{|det\ A|} = k$

Per determinare l'isometria è sufficiente mettere in evidenza il valore *k* nella matrice (bisogna moltiplicare esternamente per *k* e dividere tutti gli elementi della matrice per *k* $A = k\begin{bmatrix} \frac{a}{k} & \frac{b}{k} \\ \frac{c}{k} & \frac{d}{k} \end{bmatrix}$. La matrice determinerà l'isometria componente.

Affinità

Se nessuno dei casi precedenti si è presentato, la trasformazione *T* (lineare e invertibile) rappresenta una **affinità**.
Se il determinante è pari a ±1 (ma non è una isometria, cioè *e* $A^T \neq A^{-1}$) allora l'affinità sarà detta **equivalente** (in pratica il rapporto delle aree è, in valore assoluto, pari ad 1 e quindi una figura e la sua trasformata saranno equiestese).
Di una affinità è importante determinare le direzioni invarianti. Per far ciò bisogna seguire i seguenti passi:

1. scrivere la matrice $\begin{bmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{bmatrix}$
2. imporre che il suo determinante sia pari a zero (*equazione caratteristica)*: $(a-k)(d-k)-bc=0$
3. risolvere l'equazione e determinare le due soluzioni (se esistono) k_1 e k_2 che son detti **rapporti di stiramento**.
4. individuare, sostituendo al posto di *k* di volta in volta i due valori trovati nel sistema $\begin{cases} ax+by=kx \\ cx+dy=ky \end{cases}$, le rette unite (il sistema darà o la stessa equazione nella due righe oppure l'equazione cercata e una identità)
5. se uno dei due rapporti è pari a 1 l'affinità è detta **omologica** (presenta una retta di punti uniti).