Metodi risolutivi per le disequazioni algebriche

v.scudero

Una disequazioni algebrica si presenta in una delle quattro forme seguenti:

(1) P(x) > 0 (2) P(x) < 0 (3) P(x) ≥ 0 (4) P(x) ≤ 0

essendo P(x) un polinomio in x.

Noi studieremo disequazioni di I e di II grado (ovvero con P(x) polinomio di primo o di secondo grado).

Vediamo quali azioni è possibile compiere per risolvere una disequazioni:

Cosa si può fare

- *Trasportare* un termine addendo da un membro all'altro **cambiando il segno** del termine;
- *moltiplicare* o *dividere* per una quantità **positiva** tutti i termini della disequazioni;
- *moltiplicare* o *dividere* per una quantità **negativa** **cambiando il verso** della disequazione;

in particolare

- *cambiare* i segni di **tutti** i termini **cambiando il verso** della disequazione.

Cosa non si può fare:

- spostare un termine addendo da un membro all'altro senza cambiarlo di segno;

  es. $3x+1>7x-1 \Rightarrow 3x+7x>-1-1$ ERRATO

  $\Rightarrow 3x-7x>-1-1$ CORRETTO

- cambiare tutti il segno a tutti i termini della disequazione senza cambiare il verso

  es. $1-x^2>0 \Rightarrow x^2-1>0$ ERRATO

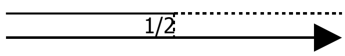
  $\Rightarrow x^2-1<0$ CORRETTO

disequazioni di I grado

forma normale e soluzione (dopo tutti i passaggi algebrici) – tipo (1)

$$\boxed{ax+b>0 \Rightarrow x>\frac{-b}{a}}$$

procedimento

1	Isolare i termini con le "*x*" portandoli al primo membro e spostando al secondo membro tutti i termini noti (senza "*x*")	$3x+1>7x-1 \Rightarrow 3x-7x>-1-1$
2	Sommare i termini al primo e al secondo membro	$3x-7x>-1-1 \Rightarrow -4x>-2$
3	Se il coefficiente della "*x*" è negativo cambiare i segni e il verso	$-4x>-2 \Rightarrow 4x<2$
4	Dividere per il coefficiente della "x"	$4x<2 \Rightarrow \frac{4}{4}x<\frac{2}{4} \Rightarrow x<\frac{1}{2}$
5	Rappresentare graficamente la soluzione	

n.b. il segno "-" nella soluzione ***–b/a*** indica che il termine *b* va cambiato di segno e non che *b* è negativo

disequazioni di II grado

forma normale (dopo tutti i passaggi algebrici) – tipo (1)

$$\boxed{ax^2 + bx + c > 0}$$

procedimento risolutivo
È importante ricordare che la soluzione di una disequazione di secondo grado utilizza le eventuali soluzioni dell'equazione associata ma non coincide con le soluzioni dell'equazione stessa.

Equazioni del tipo (1) e (2) con *a>0*

1. calcolare il valore del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$
2. se $\Delta > 0$ risolvere l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{array} \right.}$$

3. ricavare la soluzione della disequazioni dalla seguente tabella

a>0	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$\Delta > 0$	Valori esterni rispetto alle soluzioni dell'equazione $x < x_1 \vee x > x_2$	Valori interni rispetto alle soluzioni dell'equazione $x_< < x < x_2$
$\Delta = 0$	$x \neq \frac{-b}{2a}$	N.S.
$\Delta > 0$	$\forall x \in \Re$	N.S.

Equazioni del tipo (3) e (4) con *a>0*
Seguire i punti 1-2 del procedimento precedente, quindi
3. ricavare la soluzione della disequazioni dalla seguente tabella

a>0	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$
$\Delta > 0$	Valori esterni rispetto alle soluzioni dell'equazione $x < x_1 \vee x > x_2$	Valori interni rispetto alle soluzioni dell'equazione $x_< < x < x_2$
$\Delta = 0$	$\forall x \in \Re$	$x = \frac{-b}{2a}$
$\Delta > 0$	$\forall x \in \Re$	N.S.

disequazioni fratte

si tratta di disequazioni del tipo

(5) $$\frac{N(x)}{D(x)} > 0 \qquad \frac{N(x)}{D(x)} < 0 \qquad \frac{N(x)}{D(x)} \geq 0 \qquad \frac{N(x)}{D(x)} \leq 0$$

oppure del tipo

(6) $$F_1(x) \cdot F_2(x) > 0 \qquad F_1(x) \cdot F_2(x) < 0 \qquad F_1(x) \cdot F_2(x) \geq 0 \qquad F_1(x) \cdot F_2(x) \leq 0$$

essendo $N(x)$, $D(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ polinomi in *x.*

Per le disequazioni del tipo (5) si procede come segue:

1. si pone $N(x) > 0$ (o "≥0") e si ricava la soluzione di tale disequazione
2. si pone $D(x) > 0$ e si ricava la soluzione di tale disequazione.
3. Si riportano le due soluzioni su un unico grafico (**per ogni disequazione bisogna ottenere una sola soluzione e quindi una sola linea nel grafico**).
4. Si assegna il segno "+" per ogni intervallo rappresentato con una linea continua (ovvero dove la disequazione è verificata) e il segno "-" per ogni linea tratteggiata (ovvero dove la disequazione non è verificata)
5. Si procede con il prodotto dei segni assegnando così un segno per ogni intervallo individuato dalle due soluzioni
6. Gli intervalli che presentano il segno corrispondente al verso della disequazione iniziale rappresentano la soluzione della disequazione fratta.

Esempio

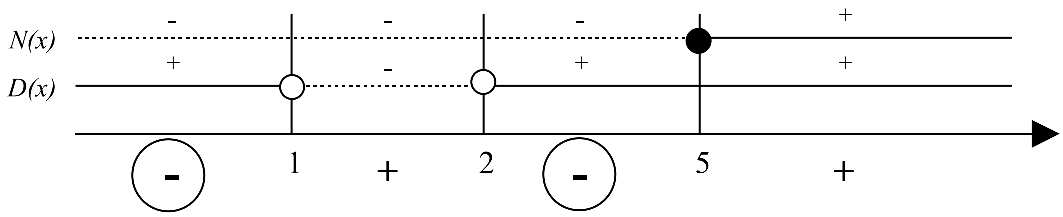
Risolvere la disequazione $\frac{x-5}{x^2-3x+3} \leq 0$

Risolviamo separatamente le due disequazioni:

$$N(x) \geq 0 \Rightarrow x - 5 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \geq 5}$$

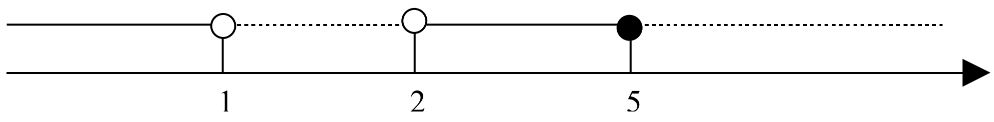
$$D(x) > 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{x < 1 \vee x > 2}$$

riportiamo le soluzioni su un unico grafico, assegniamo i segni e li moltiplichiamo:



Nel grafico evidenziamo la soluzione (gli intervalli con il segno "-" corrispondenti al verso della disequazione iniziale $\frac{x-5}{x^2-3x+3} \leq 0$ *).*

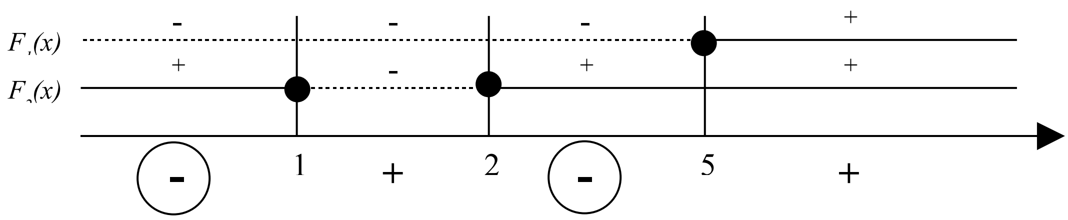
La soluzione cercata è quindi $\boxed{x < 1 \vee 2 < x \leq 5}$



i cui grafico è

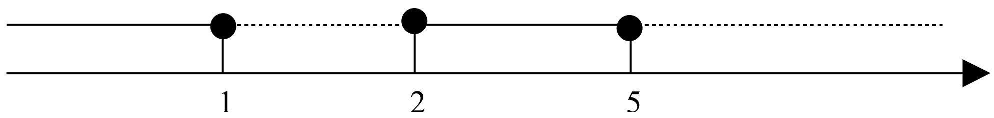
<u>Le disequazioni del tipo (6) si risolvono come quelle del tipo (5)</u>. Vediamo un esempio: la disequazione $(x-5)\left(x^2-3x+2\right) \le 0$ si risolve allo stesso modo dell'esempio precedente tranne che per la posizione di entrambi i fattori "≥0".

$$F_1(x) \ge 0 \Rightarrow x-5 \ge 0 \Rightarrow x \ge 5$$
$$F_2(x) \ge 0 \Rightarrow x^2-3x+2 \ge 0 \Rightarrow \boxed{x \le 1 \vee x \ge 2}$$



La soluzione cercata è quindi $\boxed{x \le 1 \vee 2 \le x \le 5}$

i cui grafico è



Le disequazioni fratte si risolvono tutte allo stesso modo, qualunque sia il numero di fattori presenti al numeratore e al denominatore: ogni fattore si pone **sempre** ">0" o "≥0" e si riporta la soluzione su un unico grafico. Avremo così tante linee (che rappresentano le soluzioni di ogni singola disequazione) per altrettante disequazioni. Assegnando il segno "+" per ogni linea continua e il segno "-" per ogni linea tratteggiata e svolgendo il prodotto dei segni si otterrà la soluzione della disequazione fratta.
Una disequazione del tipo

$$\frac{N_1(x) \cdot N_2(x) \cdot N_3(x)}{D_1(x) \cdot D_2(x)} \ge 0$$

si risolve ponendo

$$\begin{aligned} N_1(x) &\ge 0 \\ N_2(x) &\ge 0 \\ N_3(x) &\ge 0 \\ D_1(x) &> 0 \\ D_2(x) &> 0 \end{aligned}$$

e, dopo aver riportato le soluzioni di ogni singola disequazione su un unico grafico, assegnando i segni a ciascun tratto di linea. Sul grafico dovranno esserci <u>5 linee</u>. Dopo aver svolto il prodotto dei segni si prenderanno gli intervalli dove risulta il segno "+" in quanto la disequazione iniziale presenta il verso "≥".

Sistemi di disequazioni

I sistemi di disequazioni si risolvono in maniera analoga alle disequazioni fratte per la prima parte ma differiscono notevolmente nella ricerca delle soluzioni mediante l'utilizzo del grafico delle soluzioni. Questa analogia durante lo svolgimento della parte iniziale può indurre ad errore ritenendo i sistemi e le disequazioni fratte del tutto equivalenti. La differenza, invece, è notevole: nei sistemi cerchiami gli intervalli che soddisfano **contemporaneamente** le disequazioni coinvolte, nelle disequazioni fratte ci interessano, invece, gli intervalli che rendono il rapporto o il prodotto delle dei polinomi coinvolti nella disequazione positivo o negativo. Così se il sistema

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-3>0 \end{cases}$$

è risolto **solo** da tutte le x maggiori di 3 (soluzione $x>3$), la disequazione fratta

$$\frac{x-1}{x-3}>0$$

è soddisfatta **sia** per tutte le x maggiori di 3 e **sia** per tutte le x minori di 1 (soluzione $x<1 \vee x>3$).

Se prendiamo, ad esempio, il valore **0**, che non soddisfa il sistema, notiamo che la quantità $\frac{0-1}{0-3}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$ è positiva e, quindi, soddisfa la disequazione fratta.

Bisogna fare attenzione a non confondere le due situazione per evitare di considerare valide soluzioni che non lo sono o di non accettare soluzioni che lo sono.

Un sistema di disequazioni si risolve nel modo seguente:

1. si risolvono separatamente le disequazioni così come compaiono nel sistema (senza imporre ">0")
2. si riportano le soluzioni su un unico grafico
3. si considera soluzione l'unione di tutti gli intervalli dove sono presenti **solo linee continue**.

Esempio

Risolvere il seguente sistema di disequazioni

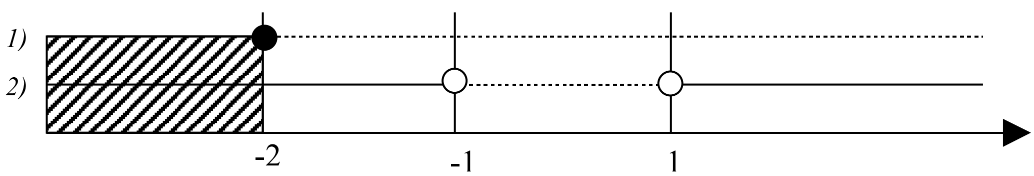
$$\begin{cases} x+2\leq 0 \\ x^2-1>0 \end{cases}$$

risolviamo le due disequazioni separatamente

1) $x+2\leq 0 \Rightarrow \boxed{x\leq -2}$

2) $x^2-1>0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow$ (2 sol. significa $\Delta>0$) $\Rightarrow \boxed{x<-1 \vee x>1}$

riportiamo le soluzioni sul grafico



La soluzione cercata è $\boxed{x\leq -2}$

Esercizi svolti

Risolvere le seguenti disequazioni

1. $4x > 0$
2. $5x^2 > 0$
3. $5x^2 < 0$
4. $5x^2 \geq 0$
5. $5x^2 \leq 0$
6. $x^2 - 4 > 0$
7. $x^2 + 4 > 0$
8. $x^2 + 4 < 0$

Si tratta di una serie di disequazioni che, seppur semplici ed immediate, inducono spesso all'errore, sia per la "leggerezza" con le quali vengono svolte – appunto perché ritenute semplici – sia perché risolte come equazioni:

1. $4x > 0 \Rightarrow \frac{4}{4}x > \frac{0}{4} \Rightarrow \boxed{x > 0}$
2. $5x^2 > 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow x \neq \frac{-b}{2a} \Rightarrow$ equazione di II grado con $\Delta = 0 \Rightarrow \boxed{x \neq 0}$
3. $5x^2 < 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \boxed{N.S.}$
4. $5x^2 \geq 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \boxed{\forall x \in \Re}$
5. $5x^2 \leq 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} \boxed{x = 0}$
6. $x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow \boxed{x < -2 \vee x > 2}$
7. $x^2 + 4 > 0 \Rightarrow x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \boxed{\forall x \in \Re}$
8. $x^2 + 4 < 0 \Rightarrow x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \boxed{N.S.}$

Risolvere il seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \dfrac{3x}{x^2 - 1} + \dfrac{2}{x + 1} < 0 & \text{(a)} \\ 4x^3 + 3x^2 - x < 0 & \text{(b)} \\ \dfrac{(5 - x)(2x + 1)}{x^2 - 9} \geq 0 & \text{(c)} \end{cases}$$

Si tratta di un sistema formato da tre disequazioni algebriche fratte. Risolviamo separatamente le tre disequazioni che, per individuarle senza possibilità di confonderci, chiameremo (a), (b) e (c).

(a)

Bisogna prima ridurre il primo membro come un'unica frazione. Individuato il mcm $(x-1)(x+1)$ si procede alla somma delle frazioni

$$\frac{3x+2(x-1)}{(x-1)(x+1)}<0$$

$$\frac{3x+2x-2}{(x-1)(x+1)}<0$$

$$\frac{5x-2}{(x-1)(x+1)}<0$$

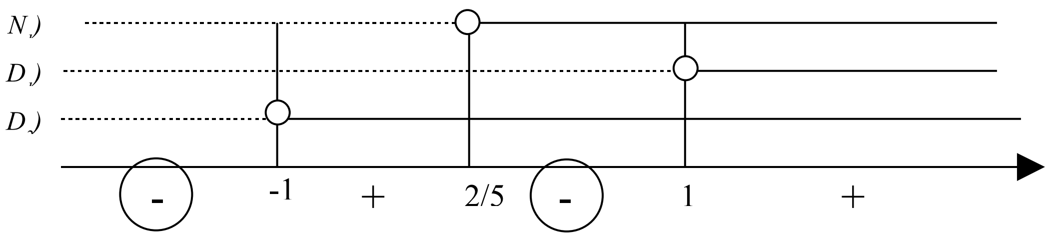
Adesso che l'equazione è scritta in forma normale – tipo (5) – poniamo i tre fattori N_1, D_1 e D_2 maggiore di zero e risolviamo:

$$N_1>0 \qquad 5x-2>0 \Rightarrow 5x>2 \Rightarrow \frac{5}{5}x>\frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{x>\frac{2}{5}}$$

$$D_1>0 \qquad x-1>0 \Rightarrow \boxed{x>1}$$

$$D_2>0 \qquad x+1>0 \Rightarrow \boxed{x>-1}$$

La disequazioni fratta va risolta utilizzando il grafico dei segni:



Essendo il verso della disequazione "<" dovranno essere presi gli intervalli nei quali si ha il segno "-", cioè

$$\boxed{x<-1 \vee \frac{2}{5}<x<1}$$ Soluzione di (a)

In questa disequazione bisogna mettere in evidenza la "x" per ridurla nella forma normale del tipo (6)

$$4x^3+3x^2-x<0 \Rightarrow x\left(4x^2+3x-1\right)<0$$

risolviamo le due disequazioni e riportiamo le soluzioni sul grafico dei segni:

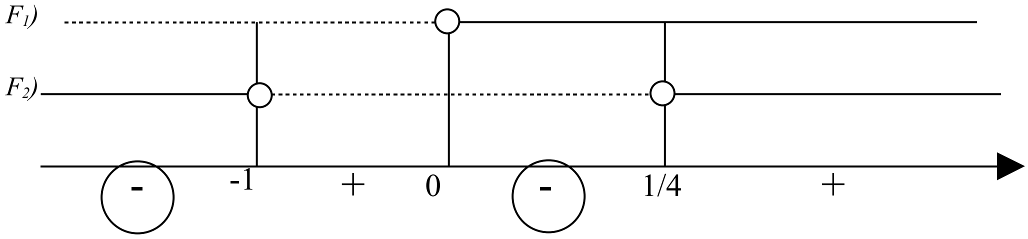
$$F_1>0 \qquad \boxed{x>0}$$

$$F_2>0 \qquad 4x^2+3x-1>0$$

$$\Delta=9+16=25$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{8}=\frac{-3\pm5}{8}=\left\langle \begin{array}{l} x_1=\frac{-3-5}{8}=\frac{-8}{8}=-1 \\ x_2=\frac{-3+5}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4} \end{array}\right.$$

$$\boxed{x<-1 \vee x>\frac{1}{4}}$$



Gli intervalli che bisogna considerare sono quelli che presentano il segno "-":

$$\boxed{x < -1 \vee 0 < x < \frac{1}{4}}$$ Soluzione di (b)

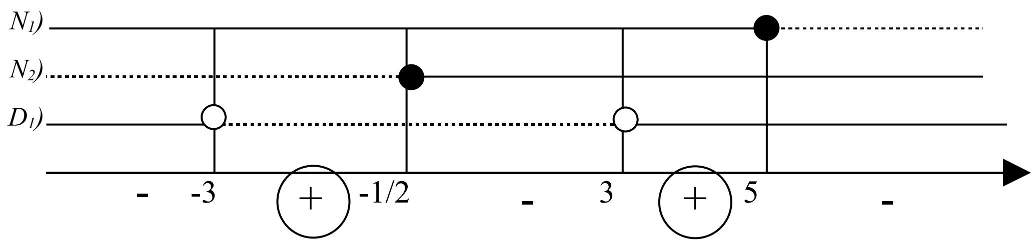
(b)
La terza disequazione si presenta in forma normale ed è del tipo (5) con tre fattori N_1, N_2 e D_1:

$N_1 \geq 0 \qquad 5 - x \geq 0 \Rightarrow \; x - 5 \leq 0 \Rightarrow \boxed{x \leq 5}$

$N_2 \geq 0 \qquad 2x + 1 > 0 \Rightarrow \; 2x \geq -1 \Rightarrow \boxed{x \geq -\frac{1}{2}}$

$D_1 > 0 \qquad x^2 - 9 > 0 \Rightarrow \; x^2 = 9 \Rightarrow \; x = \pm 3 \Rightarrow \boxed{x < -3 \vee x > 3}$

Riportiamo i risultati su grafico:



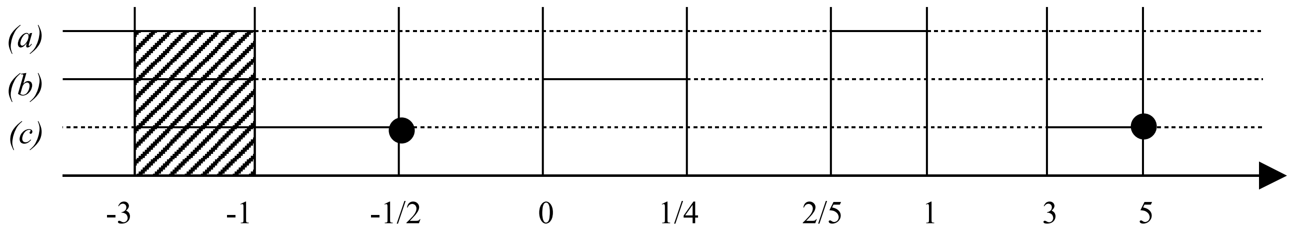
La soluzione della terza disequazione è:

$$\boxed{-3 < x \leq -\frac{1}{2} \vee 3 < x \leq 5}$$ Soluzione di (c)

Ricapitolando

$$\begin{cases} x < -1 \vee \frac{2}{5} < x < 1 & \text{(a)} \\ x < -1 \vee 0 < x < \frac{1}{4} & \text{(b)} \\ -3 < x \leq -\frac{1}{2} \vee 3 < x \leq 5 & \text{(c)} \end{cases}$$

La soluzione del sistema sarà data dall'insieme di intervalli che soddisfano *contemporaneamente* tutt'e tre le disequazioni. Se riportiamo le singole soluzioni su un grafico, la soluzione sarà formata dagli intervalli dove sono presenti **solamente** linee continue:



La soluzione del sistema iniziale è, in definitiva:

$$\boxed{-3 < x < -1}$$