Studio di funzione

appunti

Studio di funzioni algebriche fratte

1. Ricerca del dominio (C.E.);
2. Intersezioni con gli assi cartesiani;
3. Ricerca degli intervalli di positività (Studio del segno – S.D.S.);
4. Ricerca degli asintoti (uso dei limiti);
    a. Asintoti Verticali (A.V.);
    b. Asintoti Orizzontali (A.O.);
    c. Asintoti Obliqui (A. Ob.);
5. Ricerca di massimi e minimi relativi, di flessi a tangente orizzontale e degli intervalli di crescenza e decrescenza (uso della derivata prima);
6. Ricerca degli intervalli di concavità e convessità e dei flessi a tangente obliqua (uso ella derivata seconda);
7. Realizzazione del grafico cartesiano.

1. <u>Ricerca del Dominio</u>

Una funzione algebrica fratta è del tipo $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ con $f(x)$ e $g(x)$ polinomi nella variabile reale *x*.
La curva rappresentante la funzione assume i

l grado massimo tra $f(x)$ e $y \cdot g(x)$
Ad esempio la funzione $y = \frac{x^2 + 2x - 6}{x^2 - 1}$ rappresenta una curva di terzo grado essendo 2 il grado della $f(x) = x^2 + 2x - 6$ e 3 il grado della $y \cdot g(x) = y(x^2 - 1) = x^2 y - y$

Il dominio di una funzione algebrica fratta si trova ponendo

$$\boxed{g(x) \neq 0}$$

Gli intervalli soluzione della inequazione precedente formano il domino della funzione y.

2. <u>Intersezione con gli assi</u>

Prima di studiare il segno della funzione è conveniente conoscere i punti nei quali il grafico della funzione interseca gli assi cartesiani. La curva può incontrare l'asse $\vec{x}$ delle ascisse in più punti mentre l'asse $\vec{y}$ delle ordinate verrà intersecato, al più, una volta sola. Ciò significa che intersecando l'equazione della funzione con l'asse *x* –la cui equazione è $y = 0$ - si potrebbe trovare un'equazione le cui soluzioni *x* rappresentano le ascisse dei punti di intersezione, mentre intersecando l'equazione della funzione con l'asse *y* – di equazione $x = 0$ - si trova al più un punto.

Per determinare le intersezioni con l'asse *x* delle ascisse bisogna risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \\ y = 0 \end{cases}$$

che equivale all'equazione $\boxed{f(x) = 0}$

Per determinare le intersezioni con l'asse *y* delle ordinate bisogna risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \\ x = 0 \end{cases}$$

che, compatibilmente al C.E., determina il punto di coordinate

$$\boxed{(0; f(0))}$$

3. <u>Studio del segno</u>

Lo studio del segno di una funzione permette di determinare gli intervalli del dominio nei quali la funzione assume valore positivo e, conseguentemente, quelli in cui assume valori negativi. Ciò serve a determinare le zone del piano cartesiano dove tracciare il grafico della funzione ed evita di dover distinguere limite destro e sinistro per lo studio successivo degli asintoti verticali.

Per studiare i segno della funzione $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ bisogna porre

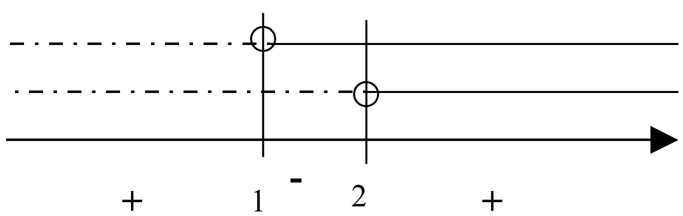
$$\boxed{\frac{f(x)}{g(x)} > 0}$$

e studiare la disequazione. Gli intervalli soluzione della disequazione rappresentano gli intervalli di positività, gli intervalli complementari rispetto al dominio quelli di negatività.

Es.

La funzione $y = \dfrac{x-1}{x-2}$ è definita in tutta la retta reale ad esclusione del punto 2 [C.E. $\forall x \neq 2$]
Studiamone il segno

$$\frac{x-1}{x-2} > 0\,; \qquad \begin{matrix} N \geq 0 \\ D > 0 \end{matrix}\,; \qquad \begin{matrix} x-1 > 0 \rightarrow x > 1 \\ x-2 > 0 \rightarrow x > 2 \end{matrix}$$



Come si evince dal grafico della disequazione la funzione assume valori positivi prima di 1 e dopo 2, mentre assume valori negativi tra 1 e 2. Entrambi dli estremi sono esclusi (in x=1 la funzione è nulla, in x=2 la funzione non esiste.).

I punti 2) e 3) si possono riassumere nel modo seguente

$$y\begin{cases} > 0 & x < 1 \vee x > 2 \\ = 0 & x = 1 \\ < 0 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

4. **<u>Ricerca degli asintoti</u>**

a) Asintoti Verticali
Gli asintoti verticali (A.V.) sono rette parallele all'asse *y* verso cui il grafico tende al tendere di *x* verso un punto escluso dal dominio (punto isolato o estremo escluso).
Per determinare gli eventuali A.V. bisogna calcolare tanti limiti quanti sono i punti isolati o gli estremi esclusi dal dominio. Se il limite tende a infinito si ha asintoto verticale.
Ovvero

Se $\boxed{\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty}$ allora la retta di equazione $\boxed{x=c}$ è un A.V.

b) Asintoti Orizzontali
Gli asintoti orizzontali (A.O.) sono rette parallele all'asse *x* verso cui il grafico tende al tendere di *x* verso infinito.
Per determinare gli eventuali A.O. bisogna calcolare il limite della funzione per x tendente a meno infinito (asintoto orizzontale sinistro – A.O.Sx) e il limite x tendente a più infinito (asintoto orizzontale destro – A.O.Dx). Il valore del limite deve essere un numero reale.
Ovvero

Se $\boxed{\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = k}$ allora la retta di equazione $\boxed{y=k}$ è A.O.Sx

Se $\boxed{\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = h}$ allora la retta di equazione $\boxed{y=h}$ è A.O.Dx

I due asintoti possono coincide, in tal caso si parla di Asintoto Orizzontale.

c) Asintoti Obliqui
Gli asintoti obliqui (A.Ob.) sono rette non parallele agli assi cartesiani verso cui il grafico tende al tendere di *x* verso infinito. Gli asintoti obliqui possono esistere solo se non ci sono i rispettivi asintoti orizzontali .
Per determinare gli eventuali A.Ob bisogna calcolare due limiti. Il primo determina il coefficiente angolare dell'asintoto e deve essere un valore reale diverso da zero; il secondo

determina il termine noto dell'equazione dell'asintoto e deve essere un numero reale (può essere anche zero).
Ovvero, la retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo se è possibile determinare (vale anche per x tendente a meno infinito):

$$\boxed{m = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1}{x} \qquad m \in \Re \,; m \neq 0}$$

e

$$\boxed{q = \lim_{x \to \infty} (y - mx) = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)} - mx \right] \qquad q \in \Re}$$

5. **<u>Ricerca dei Massimi e Minimi relativi, dei Flessi a tangente orizzontale, degli intervalli di crescenza e decrescenza.</u>**

La ricerca degli estremi relativi e dei punti di crescenza e decrescenza della funzione si svolge utilizzando la derivata prima ricordando che nei punti stazionari la derivata prima è nulla, che nei punti nei quali la funzione cresce la derivata prima è positiva e, infine, nei punti di descrescenza della funzione la derivata prima è negativa. Si procede, quindi, studiando la disequazione

$$\boxed{y' \geq 0}$$

che, nel nostro caso, diventa

$$\boxed{\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \geq 0}$$

ovvero

$$f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \geq 0$$

La natura dei punti nei quali la derivata prima si annulla si evince dallo studio del grafico della disequazione dal quale è possibile conoscere anche gli intervalli di crescenza e decrescenza come mostrato dalla seguente tabella:

x < c	***x = c***	***x > c***	***estremo relativo***
$f'(x) > 0$ cresce	$f'(x) = 0$	$f'(x) < 0$ descresce	x=c max relativo
$f'(x) < 0$ decresce	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$ cresce	x=c min relativo
$f'(x) > 0$ cresce	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$ cresce	x=c flesso crescente
$f'(x) < 0$ decresce	$f'(x) = 0$	$f'(x) < 0$ decresce	x=c flesso descrescente

6. Ricerca degli intervalli di concavità e convessità e dei flessi a tangente obliqua

Per la ricerca dei flessi obliqui e degli intervalli di concavità o di convessità si utilizza la derivata seconda della funzione. E' noto, infatti, che lo studio della derivata seconda fornisce indicazioni circa la natura dei punti dove tale derivata è positiva, nulla o negativa. Si procede, dunque, allo studio della seguente disequazione:

$$\boxed{y'' \geq 0}$$

La natura degli intervalli e dei punti nei quali la derivata seconda si annulla si evince dallo studio del grafico della disequazione secondo quanto indicato dalla seguente tabella:

|	***x = c***	***x > c***	***estremo relativo***
$f''(x) > 0$ convessità	$f'(x) = 0$	$f''(x) < 0$ concavità	x=c flesso obliquo
$f''(x) < 0$ concavità	$f'(x) = 0$	$f''(x) > 0$ convessità	x=c flesso obliquo
$f'(x) > 0$ cresce	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$ cresce	x=c flesso crescente
$f'(x) < 0$ decresce	$f'(x) = 0$	$f'(x) < 0$ decresce	x=c flesso descrescente

7. Realizzazione del grafico cartesiano.

Dopo aver preso nota di tutte le informazioni relative all'andamento della funzione (dal dominio agli intervalli di concavità) è possibile tracciare il grafico della funzione stessa. La curva dovrà rispettare tutte le indicazioni che abbiamo ottenuto dallo studio precedente.